BIBLIOTECA UNIVERSITARĂ

7

N. BĂRBULESCU

CONFERENȚIAR UNIVERSITAR

DIN TAINELE DERIVATELOR

CUM SĂ INVEȚI SINGUR CALCULUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

FUNDAȚIA REGALĂ PENTRU LITERATURĂ ȘI ARTĂ

DIN TAINELE DERIVATELOR

N. BĂRBULESCU
CONFERENȚIAR UNIVERSITAR

DIN TAINELE DERIVATELOR

CUM SĂ INVEȚI SINGUR CALCULUL DIFERENȚIAL ȘI INTEGRAL

FUNDAȚIA REGALĂ PENTRU LITERATURĂ ȘI ARTĂ
BUCUREȘTI 1943

5-III-1946 -

PREFAȚA

Nu este un secret pentru nimeni, că înțelegerea matematicilor întâmpină greutăți din cele mai mari. In licee și școli speciale, orele de matematică sunt, pentru majoritatea elevilor, ore în care se debitează « *neînțelesul* ». Din această cauză, situația elevilor la sfârșitul fiecărui an școlar se încheie, la matematică, cu un număr mare de sacrificați, mai mare decât la celelalte discipline. Situația este mai tragică la examenele particulare: mutismul și intimidarea candidaților la matematică constituesc o regulă generală. Numai ajutorul binevoitor al profesorului poate servi un colac de salvare pentru naufragiații din oceanul matematicilor. Fenomenul nu este specific țării noastre, ci se întâlnește și prin alte multe părți ale globului.

Cauza acestui nesucces în predarea matematicilor se datorește *metodei* întrebuințate. Matematicienii, în general, nu vor să admită, că disciplina lor reclamă o altă metodă de predare: o metodă de mai puțină rigurozitate, dar de mai multă claritate, o metodă în care tonul grav și concisiunea extremă nu au ce căuta. De ce să nu facem ca înțelegerea matematicilor să fie tot așa de ușoară ca înțelegerea istoriei sau geografiei, de pildă? De ce să stăruim mereu în această aberație, că asimilarea cunoștințelor matematice cere un cap special, chiar în școala secundară?

Cel dintâi neajuns mare, în predarea matematicilor, este expunerea noțiunilor și demonstrațiunilor pe un plan superior înțelegerii medii, într'o formă ultimă, concisă, abstractă și.... aridă! Se știe că, mai toate științele

cuprind *expuneri gradate*, în care noţiunile se dau mai întâi sub o formă rudimentară, care se perfecţionează apoi prin adăogiri succesive. In matematică însă, foarte multe din noţiunile «*grele*» se prezintă, dela primul contact, în forma lor definitivă; în plus, ele îmbracă chiar de atunci haina simbolisticei generale, ceea ce le răpeşte şi ultimul reazim de realitate. Se comite aici păcatul împotriva regulii pedagogice, de a trece totdeauna dela particular la general şi nu invers. O formulare generală trebuie să presupună, în învăţământul elementar, înţelegerea prealabilă a câtorva cazuri particulare. Procedarea inversă asigură asimilarea dogmatică şi nicidecum raţională a noţiunilor respective.

In al doilea rând, matematicienii pun prea mare preţ pe eleganţa demonstraţiunilor şi pe economia expunerii. Dacă aceste calităţi sunt seducătoare pentru cei iniţiaţi, ele produc în schimb desnădejde începătorilor.

Ca să înţelegi muzica wagneriană sau simfoniile lui *Beethoven*, trebuie o pregătire temeinică; eleganţa acordurilor înscrise pe portativele acestor mari creatori nu o poate judeca decât cunoscătorul tainelor muzicale. Tot astfel şi în matematică: numai cei obişnuiţi cu lumea cifrelor, numai prietenii sinceri ai simbolurilor matematice ştiu să prindă adevărata valoare a unei demonstraţiuni elegante. Pentru toţi ceilalţi, simpli începători sau amatori, eleganţa unei demonstraţiuni este, în multe cazuri, un defect şi nu o calitate. De aceea, în învăţământul de iniţiere, o demonstraţie trebuie să fie înţeleasă *clar*, nu *estetic*.

Economia expunerii vine deseori în paguba clarităţii. In Algebră, de pildă, cărţile oficiale pentru începători nu reproduc mai niciodată calculele intermediare. Se trece dela o formulă la alta prin expresiunile consacrate: *efectuând reducerile, obţinem...*, *prin transformări succesive ajungem la...*, cu toate că aceste reduceri şi transformări succesive cer o îndemânare specială, pe care o are autorul cărţii, nu şi cititorul ei.

Tot pentru a satisface economia expunerii, adevărurile stabilite anterior se introduc, în cursul demonstraţiunilor, numai sub forma de aluzii: *se ştie că...*, *am văzut că...*, după care urmează imediat o formulă misterioasă. Un autor didactic, foarte bine introdus pe vremuri, proceda şi mai radical: el introducea unele transformări în formule, fără să aducă la cunoştinţa cititorilor legea ce-i da dreptul să procedeze astfel. Bunăoară, tratând despre derivata sinusului, el punea deagata formula:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

adică admitea implicit, că cititorul poate să descifreze singur raţiunea acestei egalităţi. Această ipoteză gratuită provoca desnădejdea bieţilor elevi, ce se pregăteau în particular, fiind siliţi să interpeleze rudele şi prietenii asupra misterului din membrul II. Că relaţiunea de mai sus are nevoie de explicare ne-o dovedeşte *Comberousse* [1]; el scrie:

...remarquons que, d'une manière générale (Trigon., 81), *on a*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

En posant

$$p = x + \Delta x \quad , \quad q = x$$

on a ici

$$\frac{p+q}{2} = x + \frac{\Delta x}{2} \quad , \quad \frac{p-q}{2} = \frac{\Delta x}{2}$$

[1] *Ch. De Comberousse.* — Cours d'Algèbre supérieure, première partie, Paris, 1887.

On peut donc remplacer, dans l'égalité (1),

$$\sin(x+\Delta x) - \sin x \quad \text{par} \quad 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Așa procedează un autor conștiincios, care ține să fie clar, fără să-i fie teamă de învinuirea confraților, că tratează lucrurile prea... băbește!

Din punctul de vedere ce-l tratăm aici, am putea asemăna o demonstrație matematică cu o ascensiune turistică. Turistul încercat, cu suficientă rezistență fizică și simț al terenului, ajunge repede în vârful muntelui, luând-o pe drumul cel mai scurt, cel mai obositor și, poate, cel mai primejdios. E știut că această performanță sportivă nu e accesibilă oricui: trebuesc calități înnăscute și o practică îndelungată. Aceasta nu înseamnă însă că ceilalți muritori sunt excluși dela plăcerile ascensiunii. Turistul de ocazie, dornic să vadă perspectivele minunate ce se desfășoară ochiului pe culmile munților înalți, o ia apostolește pe drumul cel mai lung, prin serpentine și ocoluri potrivite și, după ore întregi de mers, ajunge să poposească alături de turistul încercat.

La fel și în matematică: noțiunile matematice se situează, pentru înțelegerea obișnuită, la o altitudine înaltă, așa că este nevoie de o adevărată ascensiune cerebrală, pentru a le cunoaște mai de aproape. Cei dotați cu aptitudini speciale și care au o practică mai îndelungată în astfel de operațiuni, cuceresc noțiunile mai repede și pe calea cea mai directă. Ceilalți își ating scopul mult mai încet, pe o cale mai lungă, cu numeroase opriri și ocoluri. Noțiunile matematice devin astfel accesibile tuturor minților normale; nu există, cred eu, *neînțelegerea matematică* de care vorbesc cu atâta ușurință literații. In orice creer omenesc sălășluește o *înțelegere matematică*, dar de grade diferite: unii înțeleg mai repede, alții înțeleg mai încet, *dar totuși înțeleg.*

Așa dar, în afară de căile directe, ce le cunoaștem din manualele oficiale, trebue să existe în matematică și căi indirecte, mai puțin pretențioase și mai la îndemâna tuturor. Cum se împacă această afirmație cu celebrul răspuns al lui *Euclid?*

Se știe că *Ptolemeu Filadelful*, cerând marelui geometru grec, *Euclid*, să-i arate o cale mai ușoară pentru a învăța geometria, acesta i-a răspuns: *în geometrie nu există drumuri pentru regi!*

Sunt două mii de ani și mai bine de când omenirea trăiește sub tirania acestui răspuns; cine îndrăznește să pretindă matematicienilor expuneri mai ușoare, riscă de cele mai multe ori să-și atragă răspunsul lui *Euclid.* Iată una din cauzele pentru care matematica a rămas până astăzi știința cea mai puțin populară. Sforțările de a o populariza se izbesc necontenit de pretențiile ireductibile ale nenorocitului dicton grecesc.

Pentru mine, răspunsul lui *Euclid* nu dovedește altceva, decât că marele geometru grec era un mediocru pedagog. Geometria, mai mult decât oricare altă ramură a matematicilor, poate fi făcută inteligibilă prin mijloace simple, strâns legate de concret. Dacă *Ptolemeu Filadelful* nu înțelegea lecțiunile lui *Euclid*, nu geometria era de vină, ci magistrul care ignora căile ușoare de acces la relațiunile geometrice. Postulatul lui *Euclid* dovedește cât de mare era autorul lui, ca geometru; dictonul lui *Euclid* dovedește, în schimb, cât de mic era autorul lui, ca pedagog.

Existența căilor indirecte, pentru înțelegerea matematicilor, nu trebuie să fie pusă la îndoială. Se știe doar că, aflat în fața unui elev « *mediocru* » dascălul înțelegător și cu un real talent pedagogic, se decide să părăsească metoda oficială de predare, spunându-i elevului cu blândețe: *aide s'o luăm băbește!* Iată o destăinuire de cea mai mare însemnătate! Vra să zică, pe lângă metoda urmată în cărți, unii dascăli mai au la îndemână și o altă metodă,

metoda băbească, folosită atunci când metoda oficială nu ajunge la niciun rezultat.

Se prea poate ca matematicienii de profesie să nu găsească *metoda băbească* suficient de riguroasă și de precisă. Nu face nimic! Nici noțiunile cele mai curente nu le gândim și întrebuințăm cu toată rigoarea posibilă. Marele nostru filolog dela Cluj, d-l *Sextil Pușcariu*, ne spune într'un studiu că, pentru noțiunea banală de « *propoziție* », grămăticii au dat peste o sută de definițiuni, care de care mai puțin riguroasă și mai puțin completă. Iată dar o noțiune curentă, fundamentală pentru graiul omenesc, care nu suferă o definiție în toată regula! Și, cu toate acestea, învățăm în școală propoziția și o utilizăm în viața de toate zilele.

Când stai și reflectezi mai bine, descoperi că, la urma urmei, nici fundamentele matematicilor nu sunt gândite riguros. In neprețuita lui carte, *Eonul dogmatic*, filosoful nostru *Lucian Blaga* susține că, în general, concretul nu poate fi prins de mintea omenească cu toată rigurozitatea; *concretul*, scrie textual Blaga, *nu intră pe strunga îngustă a logicului*. De altfel... « *Berkeley a invitat pe liber cugetători să nu mai vorbească pejorativ despre neinteligibilitatea dogmelor cât timp matematica, știința cea mai admirată de ei, se face vinovată de concepte cel puțin tot atât de neinteligibile* »[1]).

Nu poate fi vorba în știință de o rigurozitate absolută, ci de un grad mai mare sau mai mic de rigurozitate. Dacă nevoile învățământului superior reclamă o rigurozitate maximă, nu e niciun motiv ca ea să patroneze și învățământul inferior. Să ne mulțumim aici cu o rigurozitate mai mică, dar mai sugestivă, care să nu exproprieze noțiunile de acea « *căldură* » intrinsecă, ce înlesnește pătrunderea lor în intelect.

[1]) *Lucian Blaga*, Eonul dogmatic, pag. 101, « Cartea Românească », București.

Rigurozitate maximă în matematică? Da, pentru învățământul superior, de specialitate, unde matematica constitue un scop în sine, nu pentru învățământul inferior și aplicat, unde matematica se învață în cadrul culturii generale sau ca simplu meșteșug.

In sfârșit, o ultimă observație avem de făcut asupra problemelor de matematică. Pentru începători, matematica se rezumă la teoreme și probleme; dacă cu teoremele se mai poate scoate la capăt, printr'o sforțare în plus de memorie, apoi cu problemele falimentul este desăvârșit. De ce?

Pentrucă, în paginile cărților de astăzi, trecerea dela teoreme la probleme nu este continuă, ci întreruptă brusc, printr'un abis generator de desnădejdii. Singur nu poți trece acest abis, decât numai dacă, ascultând de o pornire lăuntrică, meșteșugești toată ziua formule matematice și capeți îndemânarea necesară. In lipsa acestei îndemânări proprii, trebuie să chemi în ajutor îndemânarea aproapelui, trebuie să-ți ici un meditator. Din acest punct de vedere, matematica se găsește încă în perioada scolastică, pe vremea când învățământul se propovăduia prin viu grai, din lipsa de cărți. Ea a rămas o disciplină aristocratică, fiind apanajul celor înzestrați cu talent special sau cu suficiente resurse materiale, pentru tocmirea unui meditator.

Capitolul problemelor în matematică merită o atenție deosebită, căci lor li se datorește o bună parte din antipatia cu care elevii privesc această disciplină. Dacă o problemă ar consta din simpla aplicație numerică a unei formule stabilită anterior, totul ar merge bine și nicio vorbă potrivnică nu s'ar face auzită, în această privință. Dar, vezi, mai totdeauna problemele au în ele ceva misterios: acolo se amestecă datele până la exasperare, ca și coridoarele din labirintul lui *Dedal* și, cu cât sunt amestecate mai bine, cu atât problema este mai reușită. In cărțile de clasele primare întâlnești probleme de aritme-

tică, ce nu cedează uşor decât calculului algebric, iar în clasele gimnaziale se dau probleme care chinuiesc câteodată şi pe profesorii de matematici.

Se înţelege că pe această cale nu vom reuşi niciodată să deschidem gustul elevilor pentru o disciplină aşa de serioasă, cum e matematica. Fiecare problemă e menită parcă să şoptească elevului: *de geaba te străduieşti, n'ai talent la matematică!* Iar gravitatea cu care profesorii enunţă problemele, paralizează puterea de judecată a tinerilor elevi. La examenele de liceu, probele scrise la matematică cuprind probleme ce sunt adevărate texte de psihotehnică; ele nu dozează învăţătura elevilor, ci... aptitudinile lor pentru matematici!

Matematica este şi ştiinţă, dar este şi artă: este ştiinţă pentru teoreme şi artă pentru probleme. Dacă orice cap normal îşi poate însuşi, mai uşor sau mai greu, partea ştiinţifică a matematicilor, în schimb partea artistică revine numai celor cu aptitudini speciale, cu talent la matematică. Există un talent la matematică, aşa cum există un talent la desen, la muzică, la literatură şi împărţit de bunul Dumnezeu cu aceeaşi sgârcenie.

Nu stă în intenţia mea să tăgăduiesc rolul problemelor în desăvârşirea învăţământului matematic; departe de mine acest gând! Recunosc şi eu, împreună cu toţi dascălii, că problemele sunt trebuincioase învăţământului; numai că, pentru a obţine rezultatul dorit, ele ar trebui altfel dozate şi altfel prezentate.

Mai întâi, pentru licee şi şcoli speciale, chestiunea problemelor să fie privită sub unghiul aplicaţiunilor directe, nu al desvoltării aptitudinilor matematice... Că cine nu s'a născut cu talent la matematică, nu are ce desvolta, oricât de mare i-ar fi strădania! Deci: *mai multă claritate în probleme, mai puţine artificii în rezolvare!*

In al doilea rând, multe din problemele propuse în cărţi să fie însoţite de rezolvarea lor completă; numai astfel vom reuşi să înlăturăm abisul semnalat mai sus,

între teoreme şi probleme. Elevii cari urmează la şcoală au uneori norocul să dea peste câte un profesor, ce-şi ia rolul în serios şi-i iniţiază în tainele problemelor de matematică. Dar ceilalţi elevi, pregătiţi în particular, pe apucate, — sau cei cari, din simplă curiozitate şi plăcere de studiu (sunt şi din aceştia!) îşi petrec timpul în tovărăşia cărţilor de matematică? Cum poate cartea să le fie un îndrumător serios, când autorii nu suflă o vorbă despre necunoscutul ce învălue problemele propuse. Sau, când suflă, suflă mizerabil: neîndestulător, fără de folos!

Dar şi elevii de şcoală sunt nevoiţi să caute acasă, în carte, deslușirile cele mai temeinice, chiar dacă dascălul şi-a făcut pe deplin datoria, explicând «*lecţia viitoare*». Să spunem adevărul pe faţă: câţi elevi sunt într'adevăr atenţi la explicarea profesorului? Dacă stau liniştiţi în bancă şi privesc tabla acoperită cu semne cabalistice, asta nu înseamnă nimic. «*Ascultam pe craiul Ramses şi visam la ochi albaştri*» ne spune *Eminescu*. Iar *Vlahuţă*:

In clasă: dascălul la tablă
Măsoară calea dintre stele;
Pe liniile lui mi-s ochii —
Dar unde's gândurile mele!...

In concluzie: fie că ai, fie că n'ai profesor, cartea de matematică trebuie să-ţi dea toate amănuntele, să nu condiţioneze o explicare suplimentară.

Consideraţiunile expuse mai sus ar putea să pară multora cam prea severe. In special profesorii de matematică nu vor binevoi să înţeleagă adevărurile desvăluite aici, tăgăduind *criza pegadogică* în care se sbate matematica. Dar şi cele mai superficiale cercetări asupra absolvenţilor de liceu duc pe omul de bună credinţă la convingerea că «*este ceva putred în Danemarca*» asta, a matematicienilor. Autorul acestei cărţi predă de 15 ani un curs de fizică în anul I de Universitate, aşa că a putut

să se încredințeze ani dearândul, că rodul muncii la liceu, în ce privește matematica, nu atinge randamentul dorit: tinerii noștri studenți se găsesc în continuă vrajbă cu știința numerelor. (Profesorii de matematici să nu se supere de această constatare; ea este valabilă și pentru alte discipline, cum este, bunăoară, fizica. Numai că, pentru aceasta din urmă, cauzele sunt mai dureroase și cu totul altele).

In țările din Apus s'au formulat încă de mult numeroase critici împotriva sistemului oficial de predare al matematicilor. Acolo a și înflorit o literatură bogată, care încearcă să popularizeze noțiunile matematice, părăsind tonul grav și rigurozitatea extremă pretinsă de matematicienii profesioniști.

La noi în țară, nu cunosc o altă critică mai bine condusă, ca aceea semnată de cunoscutul ex-Profesor de poduri dela Școala Politehnică, d-l Ion Ionescu [1]). In revista *Natura* din Decemvrie 1912, d-sa a publicat sub titlul de *Nepopularitatea matematicilor* un studiu de critică și sugestii cuprinzătoare de mult adevăr, din care ne permitem, cu îngăduința autorului, să alegem câteva.

Nepopularitatea matematicilor — scrie d-l prof. Ionescu — *are multe cauze, dar în prima linie vina este a lor, apoi a acelora cari le fac și le profesează, și în urmă a dușmanilor unora și altora.*

...In special nepriceperea contribue mult la nepopularitatea matematicilor. De fapt, la început matematica nu se pricepe bine sau chiar de loc. Aritmetica și geometria se învață la început pe dinafară, prin reguli și aplicațiuni.

---

[1]) D-l Prof. *Ion Ionescu* a publicat în revistele *Natura* și *Adamachi* o seamă de articole, ce se impun cu prisosință prin puritatea stilului, prin sinceritatea convingerilor și adâncimea reflexiunilor. De numele D-Sale se leagă și enunțarea *principiului conservării neștiinței*, principiu de largă generalitate, care aduce multe foloase în interpretarea faptelor sociale.

...Trecem acum la matematicieni. Lor li se datorește în bună parte nepopularitatea actuală a matematicilor, deoarece în loc să caute metode ușoare, au căutat de multe ori să ascundă pe cele ușoare, pentru a da publicității altele mai grele și mai de nepriceput. Prin secolul al XVII-lea și al XVIII-lea se credea că acela este matematician mai mare, pe care nu-l pot pricepe cât mai mulți matematicieni. Chestiuni simple, frumoase și interesante erau prezentate în mod cu totul arid și de nepriceput. Foarte puțini matematicieni și-au dat seama că matematicile nu pot progresa decât dacă se va ocupa mai multă lume de ele, și să se caute deci să le facă mai accesibile, mai populare. Euler, în scrisorile sale către o principesă germană, este primul care s'a ocupat de această chestiune. De atunci încoace s'au făcut încercări în această direcțiune, însă fără mare efect, deoarece și azi mulți matematicieni caută să se închidă în niște cetăți în care să nu poată pătrunde decât cei ce posedă arme mai puternice ca ale lor.

...Trebue apoi să se facă matematicile mai accesibile; să se prezinte și să se predea sub forme plăcute, iar nu repulsive. Citirea lor trebue să provoace interes, admirațiune, entuziasm; căci fără de acestea nu se poate face știință.

Accesul la părțile mai aride să se facă prin rampe mai ușoare, închizându-se ochii prin părțile prea abrupte, la care s'ar putea ivi spaimă sau frică. Din când în când, pe acolo pe unde drumul devine mai greu, să se înceapă a se spune câte o poveste istorică de matematică, să se facă câte o glumă cu dânsele, să se dea câte o recreațiune, etc. Iar când soarele aplicațiunilor lor se zărește printre norii înconjurători, pe la unele coturi sau pe la unele luminișuri, să ne oprim puțin pe loc pentru a ne încălzi la dânsul, pentru a ne lumina și a ne examina dacă suntem bine pregătiți pentru a continua drumul mai departe.

Pentru cei cari voesc să facă excursiuni în domeniul matematic ar trebui unele cursuri sau cărți populare, ade-

vărate călăuze de amatori, care să difere cu totul de ceea ce se face sau se cere în şcoli, sau de cum fac cursurile ori cum scriu cărţile matematicianii. Pentru începători, cărţi de iniţiare matematică, de care au început să se publice, sunt de cel mai mare folos pentru prima îndrumare către excursiuni sau ascensiuni în domeniul matematic. Fizica, chimia, astronomia, etc., au astăzi cursuri speciale în Universităţile populare pe care le poate pricepe lumea ce voieşte să se instruiască. Trebue dar să se facă aşa ceva şi pentru matematici, deoarece există amatori pentru această ştiinţă, oameni cari ar voi să-şi dea seama cu ce se ocupă dânsele şi la ce folosesc

...Cu lecţiuni grave şi solemne de matematică, cu învăţătura de pe cărţi speciale, de pe cărţi didactice, uneori luându-se de «ici până colo», *cu chestiuni şi probleme abstracte şi artificiale, cu proprietăţi şi teoreme numerotate, cu demonstraţiuni riguroase dar aride, şi cu cărţi făcute după tipicul actual al cărţilor de şcoală, matematica nu va deveni niciodată populară, şi nu va atrage pe cei mulţi, nu numai pentru studiul lor, dar nici pentru cititul lor. Numai cu mijloace ca cele arătate mai sus, matematicile se vor răspândi mai mult, vor căpăta mulţi prieteni şi vor pierde pe mulţi din duşmanii lor de azi. Şi acest lucru a devenit necesar azi, deoarece matematica actuală nu mai poate satisface nevoile fizicienilor şi inginerilor.*

Nu ştiu cum aş putea să subliniez mai bine însemnătatea soluţiilor propuse de d-l prof. Ionescu pentru îmbunătăţirea învăţământului matematic. Ele ar trebui să fie leit-motivul profesorilor şi autorilor de manuale didactice şi să dea mult de gândit forurilor şcolare de conducere. Nevoia de a ieşi din impasul în care se găseşte înţelegerea matematicilor, este reclamată de mai toate disciplinele. O disciplină eminamente literară, cum este Psihologia, nu se mai poate studia astăzi fără cunoştinţe serioase de matematică. Cine deschide o carte de psihologie rămâne impresionat de cifrele şi formulele care

însoţesc analiza funcţiunilor intelectuale. Teoria lui *Spearman* sau metoda lui *Thurstone*, de pildă, îmbracă o haină matematică ce contrastează cu caracterul tradiţional al psihologiei.

Dar Estetica? Care cercetător serios din acest domeniu ar putea să ignoreze relaţiunile matematice ce definesc anumite caractere «*plăcute ochiului*». Celebrul canon din Antichitate şi Renaştere, *sectio aurea*, nu exprimă altceva decât proprietatea matematică a unui punct de a împărţi o dreaptă în medie şi extremă raţiune.

Cât priveşte medicina şi biologia, intervenţia calculului matematic se face simţită în cele mai diverse probleme şi metode. In marea revistă germană, *Biochemische Zeitschrift*, se întâlnesc deseori diferenţiale şi integrale iar fiziologia şi fizica medicală au capitole întregi împănate cu formule matematice.

Toate aceste discipline, îngrămădind în cuprinsul lor din ce în ce mai multă matematică, ne arată cât de mare este nevoia ca noii cercetători să stăpânească bine meşteşugul cifrelor şi formulelor. Să nu fie matematicieni, dar să cunoască mânuirea simbolurilor matematice, să fie, adică, nişte buni meseriaşi în această disciplină.

* * *

Iată atâtea şi atâtea temeiuri, care m'au hotărît să lucrez cartea de faţă. Ea vrea să înlesnească cititorilor priceperea noţiunilor mai înalte de matematică, prin eliminarea dificultăţilor ce răsar în calea începătorilor. Nu mă sfiesc s'o spun — ba, îmi fac un titlu de glorie din asta, — că metoda după care m'am călăuzit este *metoda băbească*, pomenită mai sus. Numai aşa este cu putinţă să se scoboare noţiunile mai înalte, la nivelul înţelegerii obişnuite. Lucrul este în aparenţă foarte uşor, dar, în realitate, este cu mult mai greu: a trebuit să trec cu vederea multe chestiuni, să insist mai mult asupra unora şi mai puţin asupra altora, să dozez esenţialul, să ima-

ginez căi noi de acces, etc., cu alte cuvinte, să procedez aşa cum nu ar vrea în ruptul capului să procedeze un matematician de profesie, sclav al expunerilor consacrate. Cu deosebire țin să accentuez, că *nu am voit să lucrez un manual de specialitate, ci unul de popularizare;* numai la această scară trebue judecată încercarea mea.

Cartea a fost alcătuită, punând la contribuție o experiență didactică de peste două decenii și nu cuprinde o compilație de amănunte, cum fac de obicei autorii, *unii dela alții chizmind* (vorba cronicarului Ureche). Ea are pretenția unei lucrări de oarecare originalitate în materie de predare și numai datorită acestei originalități autorul nădăjduiește că lucrarea lui își va atinge scopul urmărit.

N. BĂRBULESCU

PARTEA I

CALCULUL DIFERENŢIAL

CAPITOLUL I

IN CARE SE SPUNE CEVA DESPRE « VARIABILĂ » ŞI DESPRE « FUNCŢIUNE »

Noi presupunem că cititorul cunoaşte din algebra elementară, ce este o *variabilă* şi ce este o *funcţiune*. Cu toate acestea, vom reaminti aici înţelesul matematic al acestor cuvinte, pentru a avea siguranţa că pornim la lucru cu noţiuni perfect clare.

In aritmetică suntem obişnuiţi numai cu cantităţi fixe, constante: 7 este totdeauna şapte, 8 este totdeauna opt, ş. a. m. d. Adică, prin simbolul 7 trebue să înţelegem totdeauna exact şapte unităţi şi nu mai multe sau mai puţine. Pe scurt: *pentru un acelaşi simbol, o aceeaşi valoare*. Este restricţia fundamentală din aritmetică.

Algebra însă, voind să fie mai atotcuprinzătoare, mai generală decât aritmetica, înfrânge această restricţiune. Ea admite pentru un acelaşi simbol, o diversitate întreagă de valori: un astfel de simbol se spune că reprezintă o *variabilă*, adică o mărime ce-şi variază, ce-şi schimbă valoarea aritmetică. Litera x se ia, de cele mai multe ori, ca simbol al variabilei. Aşa dar, prin litera x se poate înţelege orice număr, orice valoare aritmetică. Când spun că îi dau lui x valoarea 7, această propoziţie se exprimă matematiceşte prin egalitatea:

$$x = 7.$$

Bine înţeles, că şi alte litere ale alfabetului pot să reprezinte o variabilă. Vom întâlni chiar în cursul expunerii

noastre expresiuni algebrice, care cuprind mai multe litere: x, u, v..., ce reprezintă fiecare câte o variabilă.

Trecem acum la noțiunea de *funcțiune*. Cuvântul *funcțiune* are în matematică un sens destul de apropiat de cel cu care circulă în vorbirea de toate zilele. Când spunem că cineva, un domn Y bunăoară, are o «*funcție*» la instituția cutare, aceasta înseamnă că d-l Y are *serviciu* la această instituție, depinde de această instituție. De pe urma acestei funcțiuni, a acestei dependențe, d-l Y primește ceva: salariul. Acest salariu depinde de veniturile instituției respective: orice variație a veniturilor ei are repercusiune și asupra salariului d-lui Y.

Ne-am apropiat foarte mult de sensul matematic al cuvântului *funcțiune*. O mărime y se spune că este *funcțiune* de o mărime x, când valoarea mărimii y depinde de valoarea mărimii x. Mărimea x poate să-și schimbe valoarea, oricum am vrea noi, ea este o *variabilă*; dar ori de câte ori x își schimbă valoarea, mărimea y suferă și ea o schimbare, și ea își modifică valoarea. Pentru ca y să fie funcțiune de x, să depindă adică de x, trebue ca între aceste două mărimi să existe o relație matematică: y să fie legat de x prin simbolurile operațiunilor matematice, $+$, $-$, etc.

Iată un exemplu: considerăm expresiunea:

$$y = x + 2.$$

Aici y este funcțiune de x; mărimea x este *variabila independentă*. Adică x poate primi orice valoare am vrea noi să-i dăm; ea este *independentă*, nimic nu o silește să capete anumite valori.

Se înțelege atunci că y nu poate căpăta orice valoare am vrea noi: valoarea lui y este determinată de valoarea lui x. De pildă, dacă îi dăm lui x valoarea 2, ceea ce înseamnă a introduce cifra 2 în locul lui x din formula dată, atunci y capătă valoarea:

$$y = 2 + 2 = 4.$$

Dacă îi dăm lui x valoarea 3, atunci y ia valoarea:

$$y = 3 + 2 = 5.$$

Prin urmare, nimic nu mă împiedecă să-i dau lui x orice valoare, să-l variez independent de orice condiție. Dar, de îndată ce am precizat valoarea lui x, am precizat implicit și valoarea lui y. Valoarea lui y este tot mereu o consecință a valorii lui x; pe scurt, *y este funcție de x.*

Matematicienii întrebuințează aici un limbaj prescurtat, care are în plus darul că este și internațional. Expresiunea *y este funcțiune de x* se traduce în limbajul matematic prin simbolul:

$$y = f(x),$$

pe care noi îl citim astfel: *igrec egal ef de ics*. Germanii, Englezii, etc., îl citesc, bine înțeles, altfel; dar oricum ai fi citit acest simbol, el naște totdeauna ideea unei legături între y și x, în care y este funcțiunea iar x variabila independentă. Iată valoarea internațională a limbajului matematic: el poate fi priceput în cuprinsul oricăror granițe. Când cunoști înțelesul unui simbol matematic într'o limbă anumită, poți spune că stăpânești înțelesul lui în orice altă limbă, fără să fii nevoit a consulta dicționare sau a cere sfatul interpreților.

Să ne întoarcem la funcțiunea noastră. După cele spuse, înțelegem că, atât x cât și y sunt cantități variabile, căci ele pot reprezenta o serie întreagă de valori aritmetice. Dar dacă alegem pe una din ele ca *variabilă independentă*, cealaltă devine *funcțiune*, adică o *variabilă dependentă*.

In exemplul precedent, am ales pe x ca variabilă independentă, astfel că y a devenit funcțiune. Această alegere este aici, ca și în multe alte cazuri, perfect arbitrară. Putem tot așa de bine să considerăm pe y ca variabilă independentă, urmând ca x să fie variabilă dependentă, adică funcțiune. In acest caz, îi dăm mai întâi lui y valori

numerice, şi calculăm de fiecare dată valoarea ce o capătă x.

Aşa dar, nu există o deosebire esenţială între funcţiune şi variabilă. Când într'o expresiune algebrică se găsesc două variabile, putem considera pe una din ele ca variabilă independentă, rămânând ca cealaltă să fie funcţiune. Dacă se găsesc trei variabile, fiecare din ele se poate lua ca funcţiune de celelalte două.

După ce recunoaştem atunci, care este variabila independentă şi care este funcţiunea, într'o expresie algebrică? Recunoaşterea se face pe baza convenţiei următoare: mărimea aleasă ca funcţiune se găseşte ea singură într'un membru al expresiei algebrice. Bunăoară, în relaţia:

$$z = 4x + y,$$

care cuprinde trei variabile, litera z, aflându-se ea singură într'un membru al formulei, reprezintă funcţiunea. Celelalte două litere din membrul II, x şi y, sunt variabile.

Dacă alegem pe y ca funcţiune, va trebui să scriem:

$$y = z - 4x,$$

unde variabilele independente sunt acum z şi x. Tot astfel vom proceda şi pentru alegerea lui x ca funcţiune, luând ca variabile independente pe y şi z. Avem atunci:

$$x = \frac{z - y}{4}$$

PROBLEME

1. De cine este funcţiune suprafaţa cercului?
2. De cine este funcţiune volumul cilindrului?
3. De cine este funcţiune suprafaţa trapezului?

CAPITOLUL II

AICI SE LĂMUREŞTE NOŢIUNEA DE « INFINIT MIC »

Aritmetica este, fără îndoială, cea mai populară ramură a matematicilor, care ne urmăreşte clipă de clipă. Toată viaţa nu facem decât să socotim, punând în aplicare cunoştinţele aritmetice, ce ne-au fost vârîte în cap, cu atâta străduinţe, în cei dintâi ani de şcoală.

Dela aritmetică la algebră nu avem decât un singur pas. Un pas îndrăzneţ, care ne poartă pe o culme înaltă, de unde perspectiva noţiunilor ne apare cu mult mai bogată. In adevăr, generalizând noţiunile şi operaţiunile aritmetice, trecem pe nesimţite în domeniul algebrei. Dar odată intraţi aici, întâlnim şi noţiuni noi. Aşa, de pildă, numerele negative: -5, $-8\ldots$, sau, în general, cantităţile negative: $-a$, $-b$, ... sunt noţiuni cu care se ocupă numai algebra. Aritmetica, legată prea mult de concret, se fereşte de asemenea subtilităţi. Şi pe drept cuvânt, căci de îndată ce le admite, îşi pierde complet individualitatea: din aritmetică devine algebră!

O altă noţiune, specifică algebrei, este noţiunea de « *infinit mic* ». Mintea omenească a reuşit să prindă în această noţiune ceva din dinamismul realităţii exterioare. Căci *infinitul mic* este o noţiune dinamică, în evoluţie continuă, o mărime ce tinde mereu să dispară şi nu reuşeşte niciodată.

Un *infinit mic* este o cantitate ce ascunde o pretenţie surprinzătoare. Intră în calcule ca oricare altă mărime, nu cere un regim preferenţial. Se supune, deci, fără discuţie, tuturor regulilor algebrice. Dar cum ai terminat calculele şi crezi că ai dreptul la odihnă, izbucneşte deodată pretenţia lui: *infinitul mic* cere să fie micşorat, cât mai mult micşorat, necontenit micşorat! Neputându-l urmări în evoluţia ce-l poartă sigur la pierzanie, îl declari imediat neglijabil, nu vrei să mai ştii de el. Îl dai afară din for-

mule și reconstituiești pe loc expresiile matematice cu termenii cari au rămas nealterați.

Infinitul mic este deci o mărime înzestrată cu această proprietate curioasă, de a tinde să dispară, după ce și-a făcut din plin datoria. Și putem spune că dispariția lui este, cel puțin tot așa de bogată în urmări ca și apariția lui. Infinitul mic joacă astfel rolul Maurului din cunoscutul dicton: Maurul și-a făcut datoria, Maurul poate să plece! In vorbirea concisă a matematicienilor, infinitul mic se definește ca o *cantitate variabilă, ce tinde către zero.*

Primind această noțiune, matematicianul se declară mulțumit. Mintea lui, educată pentru înțelegerea abstracțiunilor de acest fel, recepționează imediat noțiunea și se pune pe lucru. Pentru noi însă, noțiunea de infinit mic este mai puțin clară; dela firmă până la conținut avem de întreprins o operație pedagogică de interpretare.

Dacă am încerca să lămurim această noțiune, cu tot ce algebra ne pune la îndemână, câștigul nu ar fi prea mare. Ne-ar lipsi reprezentarea concretă, necesară unei înțelegeri temeinice. De aceea, vom încerca să clarificăm noțiunea infinitului mic, utilizând datele banale din aritmetică.

Trebue să spunem însă, dela început, că în aritmetică nu găsim nicio noțiune care să se identifice perfect de bine cu infinitul mic din algebră. Găsim însă o altă noțiune, care poate să se identifice *din când în când* cu infinitul mic: este noțiunea de *cantitate extrem de mică.* In adevăr, în mersul lui continuu spre dispariție, infinitul mic trece printr'o serie de valori aritmetice, extrem de mici. Am putea spune că o cantitate aritmetică extrem de mică reprezintă un instantaneu al infinitului mic, instantaneu prins pe un clișeu aritmetic. Iată de ce unele proprietăți ale cantităților extrem de mici se pot considera ca aparținând și infinitului mic.

Considerăm o primă proprietate caracteristică. Știm că, prin ridicare la patrat, la cub, etc., o cantitate obișnuită

(finită) crește mult în valoare. Numărul 7, ridicat la patrat, ne dă 49; ridicat la cub ne dă valoarea importantă 343.

Cu cantitățile extrem de mici — deci și cu infinitul mic — lucrurile stau altfel. O cantitate extrem de mică, ridicată la patrat, la cub, etc., își micșorează și mai mult valoarea. Ca să reprezentăm aritmetic o cantitate extrem de mică, ne vom folosi de fracțiunile zecimale, ca de pildă 0,001. Ridicată la patrat, această cantitate extrem de mică dă o milionime:

$$(0{,}001)^2 = 0{,}001 \times 0{,}001 = 0{,}000\ 001.$$

Dacă miimea este o cantitate neglijabilă, atunci milionimea este o cantitate neglijabilă dintr'o cantitate neglijabilă, adică o cantitate și mai neglijabilă. Pentru acest motiv, în multe din calculele noastre vom neglija cantitățile infinit mici ridicate la o putere oarecare (puterea a 2-a, a 3-a, etc.).

O altă proprietate a mărimilor extrem de mici este următoarea. In anumite cazuri, împărțind o cantitate extrem de mică prin alta, obținem drept cât o valoare finită, ce nu se poate neglija, de care trebue să ținem seamă. Bunăoară, să împărțim miimea cu milionimea:

$$\frac{0{,}001}{0{,}000\ 001} = 1000;$$

câtul, după cum se vede, are o valoare foarte mare în raport cu numerele împărțite. Această proprietate se întâlnește și la cantitățile infinit mici.

Faptul acesta, că raportul a doi infinit mici reprezintă în unele cazuri o valoare finită, bună de luat în considerare, stă la baza calculului derivatelor. Noțiunea de *derivată*, după cum vom vedea, nu reprezintă altceva decât raportul a doi infinit mici. Ea are o valoare finită, cu toate că se fabrică din două cantități infinit mici.

Să urmărim pe cale aritmetică evoluţia unui astfel de raport, a doi infinit mici, cari tind către zero. Pornim dela o etapă intermediară oarecare, când infinit micul dela numărător a căpătat o clipă valoarea de o miime, iar cel dela numitor valoarea de o milionime. In tendinţa lor de micşorare continuă, cei doi infinit mici trec prin alte etape succesive, luând valori de 10, de 100, etc., ori mai mici:

$$\frac{0{,}001}{0{,}000\ 001} = 1000$$

$$\frac{0{,}000\ 1}{0{,}000.000\ 1} = 1000$$

$$\frac{0{,}000\ 01}{0{,}000\ 000\ 01} = 1000 \text{ ş. a. m. d.}$$

Cei doi infinit mici se micşorează continuu, tinzând să dispară practic, dar raportul lor se menţine finit.

CAPITOLUL III

IN CARE SE VORBEŞTE DESPRE CREŞTEREA MĂRIMILOR ALGEBRICE

Am văzut că « *variabila* » este o mărime ce poate reprezenta valori diferite. Când o variabilă trece dela o valoare la alta, se spune că ea « *suferă* » sau « *primeşte* » o « *creştere* ». Bunăoară, când variabila x trece dela valoarea 4 la valoarea 5, spunem că variabila respectivă a primit o creştere. Pentru a vedea cât de mare este creşterea, facem diferenţa dintre valoarea finală şi valoarea iniţială a variabilei. In exemplul considerat, creşterea variabilei este $5-4=1$.

Dacă variabila x trece dela valoarea 4 la valoarea mai mică 3, încă se spune că variabila a primit o *creştere*; numai că, de data aceasta, creşterea este negativă (ceea ce echivalează cu o *descreştere*). In adevăr, făcând diferenţa dintre valoarea finală şi valoarea iniţială a variabilei, găsim: $3-4=-1$.

Să considerăm acum expresiunea:

$$y = 4x + 5, \qquad (1)$$

care ne reprezintă pe y ca funcţiune de x. Când variabila x îşi schimbă valoarea, funcţiunea y şi-o schimbă şi ea; cu alte cuvinte, când variabila suferă o creştere, funcţiunea creşte şi ea.

Să luăm ca valoare iniţială a variabilei, numărul 2; adică $x=2$. In consecinţă, funcţiunea y capătă valoarea:

$$y = (4 \times 2) + 5 = 13.$$

Să dăm variabilei o creştere de trei unităţi; valoarea finală a variabilei este deci egală cu valoarea iniţială 2, plus creşterea 3, adică în total 5. La rândul ei, funcţiunea y îşi schimbă şi ea valoarea; în adevăr, când $x=5$, avem pentru y:

$$y = (4 \times 5) + 5 = 25.$$

Funcţiunea y a crescut dela 13 la 25, creşterea fiind $25-13=12$.

Aşa dar, în exemplul nostru, pentru o creştere de 3 unităţi dată variabilei, funcţiunea a crescut cu 12 unităţi. Să generalizăm acest calcul, înlocuind creşterile aritmetice prin creşteri algebrice.

Să însemnăm cu a creşterea variabilei x; aceasta înseamnă că variabila trece dela o valoare iniţială x la valoarea finală $x+a$. Din cauza creşterii variabilei, funcţiunea creşte şi ea; însemnăm cu b creşterea ce o capătă func-

țiunea y. Adică, funcțiunea trece dela valoarea inițială y, la valoarea finală $y+b$.

Să introducem aceste creșteri în formula (1):

$$y + b = 4(x + a) + 5. \qquad (2)$$

Problema ce se pune acum este să stabilim relația dintre creșterea variabilei și creșterea funcțiunii, așa încât, cunoscând pe a să putem calcula imediat pe b.

Pentru a rezolva această problemă, nu avem decât să facem diferența dintre expresiunea finală a funcțiunii și expresiunea ei inițială, adică să scădem formula (1) din (2). Facem scăderea membru cu membru:

$$y+b - y = 4(x + a) + 5 - (4x + 5).$$

Observăm că, în membrul I, y se reduce și rămâne numai b; în membrul II să desfacem parantezele:

$$b = 4x + 4a + 5 - 4x - 5.$$

Făcând și aici reducerile necesare ($+4x$ se reduce cu $-4x$ și $+5$ se reduce cu -5), obținem:

$$b = 4a. \qquad (3)$$

Iată relația generală dintre creșterea funcțiunii și creșterea variabilei, pentru funcțiunea (1). Când $a=3$, calculăm imediat $b=4\times3=12$, regăsind astfel rezultatul aritmetic stabilit mai sus.

Formula (3) trebue întrebuințată numai pentru funcțiunea (1). Când avem o altă funcțiune, adică y este legat de x printr'o altă relație, diferită de (1), relația dintre creșterile a și b va fi și ea diferită. Ca dovadă, să mai considerăm un exemplu; luăm funcțiunea:

$$y = \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

Să-i dăm lui x o creștere a; y înregistrează atunci o creștere b. Acum variabila se scrie $x+a$ iar funcțiunea $y+b$. Deci formula (3) se scrie:

$$y + b = \frac{1}{x + a} \qquad (5)$$

Pentru a stabili relația dintre creșteri, scădem membru cu membru, formula (4) din (5):

$$y + b - y = \frac{1}{x + a} - \frac{1}{x}.$$

Reducem pe y în membrul I iar în membrul II aducem fracțiunile la același numitor, ca să putem face scăderea:

$$b = \frac{x - (x + a)}{x(x + a)}$$

Reducând la numărător pe $+x$ cu $-x$, obținem:

$$b = -\frac{a}{x(x + a)} \qquad (6)$$

Este relația dintre creșterea b a funcțiunii și creșterea a a variabilei, pentru expresiunea (4). Creșterea b fiind negativă, însemnează că, în realitate este o *descreștere*. In adevăr, se vede din formula (4) că, variabila fiind la numitor, creșterea ei micșorează valoarea fracțiunii. Cu alte cuvinte, când x crește, y descrește, și reciproc.

In cele două exemple de mai sus, am însemnat creșterile prin literele a și b; procedeul acesta nu este totdeauna comod. In expresiunile mai complicate, cu mai multe variabile, poți pierde ușor semnificația unei creșteri. Când calculele sunt mai grele, poți să greșești până la sfârșit, crezând, de pildă, că a este creșterea lui y iar b creșterea

lui x. De aceea matematicienii, ca oameni foarte comozi, au căutat să dea creşterilor nişte simboluri speciale, care să le reamintească în tot momentul de variabila la care se raportă. Ei iau litera grecească Δ — care se citeşte *delta* — ca simbol al creşterii şi pun alături variabila respectivă. Astfel, creşterea variabilei x, pe care noi am însemnat-o cu a, se reprezintă în matematică prin simbolul Δx şi se citeşte *delta ics;* creşterea funcţiunii y se va reprezenta, în mod analog, prin Δy şi se va citi *delta igrec.*

Observăm că Δx şi Δy nu însemnează că mărimea Δ înmulţeşte mărimea x sau y. Cele două semne alăturate nu alcătuesc o *relaţie matematică*, ci un *simbol:* este simbolul creşterii unei variabile. Ar fi fost, poate, mai corect să se scrie Δ_x şi Δ_y, pentru a se pune în evidenţă rolul de indice al literelor x şi y; se împotrivesc însă necesităţile tipografice.

Aşa dar, când variabila x primeşte o creştere Δx, valoarea ei finală se scrie $x+\Delta x$; în mod asemănător, funcţiunea y, primind creşterea Δy, valoarea ei finală se reprezintă prin $y+\Delta y$

Să introducem aceste notaţiuni noi în cele două exemple precedente. Pentru primul exemplu, relaţia (3) dintre creşterea funcţiunii şi creşterea variabilei se înfăţişează astfel:

$$\Delta y = 4.\Delta x,$$

iar pentru cel de al doilea exemplu, relaţia (6) dintre creşteri, se scrie:

$$\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

Cu acest fel de notaţiuni, nu mai poate fi vorba de nicio confuzie între creşterea funcţiunii şi creşterea variabilei.

PROBLEME

Să se stabilească relaţia dintre creşterea Δy a funcţiunii şi creşterea Δx a variabilei, în următoarele cazuri:

1. $y = 2x^2 + 1.$
2. $y = x^2 + x + 4.$
3. $y = \frac{3}{x}.$

CAPITOLUL IV

DESPRE CREŞTERILE INFINIT MICI ALE MĂRIMILOR ALGEBRICE

Am văzut în capitolul precedent cum se stabileşte relaţia dintre creşterea Δy a funcţiunii şi creşterea Δx a variabilei. Pentru funcţiunea:

$$y = 4x + 5 \qquad (1)$$

am găsit între creşteri următoarea relaţie:

$$\Delta y = 4.\Delta x. \qquad (2)$$

Ea ne spune că, în toate cazurile, creşterea funcţiunii (1) este de patru ori mai mare decât creşterea variabilei. Oricât de mari sau oricât de mici ar fi creşterile date, formula (2) este totdeauna valabilă.

Am văzut că, pentru $\Delta x = 3$, creşterea funcţiunii este:

$$\Delta y = 4 \times 3 = 12.$$

De asemenea, dacă dăm lui x o creştere de o milionime: $\Delta x = 0{,}000\ 001$ funcţiunea y capătă o creştere:

$$\Delta y = 4 \times 0{,}000\ 001 = 0{,}000\ 004,$$

adică patru milionimi.

Prin urmare, în toate cazurile, fie că dăm variabilei creşteri finite, fie că dăm creşteri extrem de mici, creşterea funcţiunii este de patru ori mai mare decât creşterea variabilei.

In exemplul precedent, relaţia dintre creşterea Δy a funcţiunii şi creşterea Δx a variabilei este foarte simplă, aşa de simplă, încât nu-i putem aduce nicio altă simplificare. Există însă o mulţime de alte exemple, când cele două creşteri sunt legate între ele printr'o formulă mai complicată. In cazul creşterilor finite, formula complicată trebue utilizată ca atare, cu toţi termenii ei; orice amputare adusă, falsifică rezultatul. Dar pentru creşterile infinit mici, vom vedea imediat că amputarea este permisă, formula poate fi simplificată; lepădarea unor termeni nu influenţează de loc rezultatul.

In adevăr, să considerăm funcţiunea:

$$y = x^2 \tag{3}$$

şi să stabilim relaţia dintre creşterea Δy a funcţiunii şi creşterea Δx a variabilei. Pentru aceasta, să-i dăm lui x o creştere Δx; variabila are acum valoarea $x+\Delta x$. Ca urmare a acestei creşteri, funcţiunea y creşte cu Δy, devenind $y+\Delta y$. Să introducem în (3) aceste valori noi ce le-a căpătat variabila şi funcţiunea:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2.$$

In membrul II avem patratul unui binom; desvoltându-l după formula cunoscută din algebră [1]), avem:

$$y + \Delta y = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{4}$$

Să scădem acum, membru cu membru, expresiunea (3) din (4):

$$y + \Delta y - y = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2.$$

[1]) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Facem reducerile necesare: în membrul I se reduce $+y$ cu $-y$ iar în membrul II se reduce $+x^2$ cu $-x^2$. Ne rămâne deci:

$$\Delta y = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2, \tag{5}$$

care este tocmai relaţia ce o căutam. Ea ne dă putinţa să calculă pe Δy, când cunoaştem pe Δx.

Să facem acestui exemplu o aplicaţie numerică. Presupunem că x are la început valoarea 2; după formula (3), valoarea ce revine atunci lui y este:

$$y = 2^2 = 4.$$

Să-i dăm acum lui x o creştere de o unitate, adică $\Delta x = 1$. Care va fi creşterea funcţiunii y?

Această creştere ne este dată de formula (5); să înlocuim deci, în această formulă pe x cu 2 şi pe Δx cu 1. Obţinem:

$$\Delta y = (2 \times 2 \times 1) + 1^2 = 5.$$

Aşa dar, pentru expresiunea (3), când variabila creşte cu o unitate, plecând dela valoarea iniţială 2, funcţiunea creşte cu cinci unităţi.

Se înţelege că putem obţine acest rezultat şi direct, numai cu ajutorul relaţiei (3). In adevăr, variabila x are la început valoarea 2, deci funcţiunea y are valoarea 4, aşa cum am calculat mai sus. Dând variabilei x o creştere de o unitate, ea trece dela valoarea 2 la valoarea $2+1=3$. Pentru această valoare nouă a variabilei, funcţiunea y devine:

$$y = 3^2 = 9.$$

Prin urmare, valoarea iniţială a funcţiunii a fost 4; valoarea finală este 9; funcţiunea a crescut deci cu $9-4=5$.

Să considerăm acum creşteri extrem de mici; bunăoară să-i dăm lui x, care are la început valoarea 2, o creştere

de o milionime, adică $\Delta x = 0{,}000\,001$. Acum formula (5) ne dă:

$$\Delta y = (2 \times 2 \times 0{,}000\,001) + (0{,}000\,001)^2,$$

sau, făcând calculele aritmetice:

$$\Delta y = 0{,}000\,004 + 0{,}000\,000\,000\,001,$$

sau

$$\Delta y = 0{,}000\,004\,000\,001.$$

Iată valoarea exactă a creşterii funcţiunii, în cazul considerat!

Privind acest rezultat, vedem că el se poate rotunji, luând numai:

$$y = 0{,}000\,004.$$

Ceea ce am lepădat nu are aproape nicio importanţă practică. Cantitatea neglijată provine, după cum se vede, din ridicarea la patrat a unei cantităţi extrem de mici. Iar noi am spus la capitolul II, că avem voie să neglijăm în calcule cantităţile extrem de mici ridicate la o putere oarecare (puterea a 2-a, a 3-a, etc.), deoarece valoarea lor devine din ce în ce mai mică.

Cu atât mai mult avem acest drept în cazul cantităţilor infinit mici care, potrivit definiţiei, tind până la urmă să devină mai mici decât orice cantitate posibilă, adică ajung în pragul dispariţiei.

Aşa dar, când dăm variabilei x o creştere extrem de mică, putem să lepădăm în formula (5) — *formula creşterilor* — ultimul termen. Creşterea Δy a funcţiunii se calculează atunci prin formula mai simplă:

$$\Delta y = 2x.\Delta x. \qquad (6)$$

Această formulă amputată dă rezultate cu atât mai exacte, cu cât considerăm pe Δx mai mic, mai neglijabil. Noi am admis mai sus, că milionimea este perfect neglijabilă, ceea ce este foarte adevărat, din punct de vedere practic. Dar din punct de vedere speculativ, ca să avem un adevărat infinit mic, ar trebui să luăm nu milionimea, ci a miliarda, din a miliarda, etc., parte dintr'un întreg şi încă nu ar fi deajuns! Nimeni nu ne poate împiedeca să gândim un astfel de infinit mic, şi nu e de niciun folos să-l reprezentăm printr'o valoare aritmetică, chiar ne-mai pomenit de mică.

Am spus că prin simbolurile Δx şi Δy se reprezintă creşteri *finite*. Pentru creşterile infinit mici care tind către zero, matematicienii întrebuinţează un alt simbol, numit *diferenţială:* în locul literei greceşti Δ, se pune litera d din alfabetul latin. O creştere *infinit mică* a variabilei x, adică diferenţiala lui x, se scrie dx şi se citeşte *de ics*. In mod analog, o creştere infinit mică a funcţiunii y, adică diferenţiala lui y, se scrie dy.

Pentru a preciza că formula (6) este valabilă numai pentru creşteri infinit mici, în curs de dispariţie, ea trebuie scrisă cu diferenţiale:

$$dy = 2x.dx.$$

Să facem ca, încheiere, un rezumat al cunoştinţelor dobândite până acum.

Intre creşterea funcţiunii şi creşterea variabilei independente se poate stabili totdeauna o relaţie matematică. Ea ne poate servi să calculăm creşterea funcţiunii, când cunoaştem creşterea variabilei. In acest calcul trebue să ţinem seamă de toţi termenii relaţiei stabilite, dacă cele două creşteri sunt finite. Dar dacă cele două creşteri sunt infinit mici, în curs de dispariţie, putem să lepădăm unii termeni, ce au o valoare prea mică. In special termenii ce cuprind un infinit mic la o putere oarecare (puterea a 2-a, a 3-a, etc.) sunt cantităţi perfect neglijabile. Eliminarea lor dintr'o relaţie nu influenţează câtuşi de puţin rezultatul final, căci acest rezultat final este valabil numai în condiţiunile considerate.

PROBLEME

Să se stabilească relaţia dintre creşterea funcţiunii şi creşterea variabilei, mai întâi pentru creşteri finite, apoi pentru creşteri infinit mici:

1. $y = x^3$.
2. $y = \frac{a}{x^2}$ (a este o constantă).
3. $y = (x + 4)^2$.

CAPITOLUL V

CITITORUL AFLĂ ACUM CE ESTE O DERIVATĂ

In capitolul precedent am văzut că se poate stabili totdeauna o relaţie matematică între creşterea Δy a unei funcţiuni şi creşterea Δx a variabilei corespunzătoare. Şi am mai văzut că această relaţie devine mai simplă, dacă cele două creşteri sunt infinit mici. Căci atunci unii termeni din formulă se pot lăsa de o parte, având o valoare prea mică, pentru a influenţa cu adevărat rezultatul, în condiţiunile date.

Această lepădare de termeni, în formula creşterilor, se justifică şi mai bine, dacă luăm raportul creşterilor. In adevăr, să considerăm din nou funcţiunea cercetată în capitolul precedent:

$$y = x^2.$$

Am stabilit că, pentru această funcţiune, relaţia dintre creşterea Δy a funcţiunii şi Δx a variabilei, este:

$$\Delta y = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Impărţind ambii membri cu Δx, obţinem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Să considerăm acum creşteri infinit mici; aceasta revine în a înlocui creşterile finite Δx şi Δy prin creşterile infinit mici dx şi dy. Formula de mai sus se scrie acum:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx. \qquad (1)$$

Am spus că dx este un infinit mic; în membrul II al formulei (1) avem deci un termen finit, la care se adaugă un termen infinit mic. Acest al doilea termen, fiind infinit mic, în curs de dispariţie, este neglijabil. Suntem îndreptăţiţi să-l lăsăm de o parte prin însuşi înţelesul ce-l atribuim cuvântului de «*infinit mic*»: un infinit mic însemnează o cantitate ce tinde să devină neglijabilă faţă de orice cantitate finită. In consecinţă, infinitul mic dx este neglijabil faţă de cantitatea finită $2x$.

Un cititor mai curios — mai exact, o cititoare — ne-ar putea întreba: cât de mică trebue să fie creşterea dx, pentru ca valoarea ei să fie neglijabilă faţă de mărimea $2x$?

Răspundem: creşterea dx trebue să fie aşa de mică, încât să nu influenţeze mărimea $2x$. Cât anume, nu interesează; de aceea nici nu indicăm valoarea aritmetică a lui dx. Ajunge să ştim că trebue să-l alegem pe dx extrem de mic; cu imaginaţia putem să-l considerăm aşezat chiar în pragul dispariţiei. De altfel, aşa şi trebue înţeles simbolul dx sau dy: *în continuă scădere, până aproape de dispariţie.*

Matematicienii enunţă această propoziţie sub o altă formă: ei spun că diferenţiala este o creştere infinit mică, *ce tinde către zero.* Când o mărime variabilă tinde către zero, însemnează în mod cinstit, că ea se tot micşorează, atingând valori neînchipuit de mici. Dar această micşorare continuă nu ajunge până la dispariţie: *mărimea infinit mică tinde numai către zero, dar nu ajunge niciodată zero.* Mărimea tinde să dispară, dar nu o lăsăm să dispară, ci o oprim în pragul dispariţiei, când a atins cea mai mică valoare ce este cu putinţă. Căci dacă am lăsa

mărimea să dispară, în momentul acela am pune şi noi condeiul jos, ne mai având ce calcula!

Cu cât alegem pe dx mai mic, cu atât şi dy este mai mic; dar raportul lor este o cantitate finită, după cum se vede din formula (1). Lucrul nu este de mirare! Să ne aducem aminte de cele spuse la capitolul II: raportul a doi infinit mici este, în unele cazuri, o cantitate finită. Un astfel de caz îl avem în formula (1). Când dx se tot micşorează, dy se micşorează şi el, iar membrul II al acestei formule tinde să se reducă la $2x$, pierzând cantitatea anexă dx. Cu alte cuvinte, când creşterile diferenţiale dx şi dy ajung în pragul dispariţiei, raportul lor devine egal cu $2x$. Formula (1) se scrie atunci:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Raportul acesta, dintre diferenţiala funcţiunii şi diferenţiala variabilei, se numeşte *derivata* funcţiunii respective. Astfel, funcţiunea considerată:

$$y = x^2$$

are ca *derivată:*

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Se obişnuieşte ca derivata să se însemne şi cu o singură literă: cu litera care reprezintă funcţiunea, la care se adaugă un accent. De pildă, derivata funcţiunii y se înseamnă cu y'; în exemplul precedent vom scrie:

$$y' = 2x. \tag{2}$$

Putem merge şi mai departe. Observăm că derivata y' este tot o funcţiune de x. Şi acestei funcţiuni y' îi putem calcula o derivată, urmând procedeul indicat mai sus.

Anume, să-i dăm variabilei x o creştere infinit mică dx; atunci funcţiunea y' creşte cu dy'. Variabila devine

acum $x+dx$ iar funcţiunea $y'+dy'$. Introducând aceste valori în (2), obţinem:

$$y' + dy' = 2(x + dx). \tag{3}$$

Pentru a afla creşterea dy' scădem membru cu membru relaţia (2) din (3):

$$y' + dy' - y' = 2(x + dx) - 2x.$$

Facem reducerile în membrul I şi desvoltăm paranteza din membrul II:

$$dy' = 2x + 2dx - 2x.$$

Reducem termenii asemenea din membrul II şi ne rămâne:

$$dy' = 2dx,$$

de unde:

$$\frac{dy'}{dx} = 2.$$

Am obţinut astfel derivata funcţiunii y', căci am ajuns la câtul dintre diferenţiala funcţiunii şi diferenţiala variabilei. Să reprezentăm şi această derivată printr'o singură literă, urmând regula cunoscută: luăm litera care reprezintă funcţiunea, deci pe y' şi-i aplicăm un accent: vom scrie dar y'' şi vom citi: *igrec secund.* Avem, în cazul nostru:

$$y'' = 2.$$

Prin urmare, funcţiunea $y = x^2$ are o derivată $y' = 2x$, care la rândul ei are o derivată $y'' = 2$. Se spune că y' este derivata de ordinul I a funcţiunii y iar y'' este derivata de ordinul al II-lea. In general, pentru o funcţiune dată y, putem calcula o serie întreagă de derivate: y', y'', y'''..., luând de fiecare dată derivata derivatei precedente.

CAPITOLUL VI

IN CARE SE ARATĂ CĂ AFLAREA DERIVATEI NU ESTE TOCMAI AŞA DE COMPLICATĂ, PE CÂT AR PĂREA LA INCEPUT

Capitolul precedent ne-a făcut cunoscut, ce este *derivata*. Vom repeta aici definiţia ei, căci numai cunoscând bine definiţia unei noţiuni, putem pricepe clar şi repede operaţiunile matematice prin care o stabilim.

Se numeşte derivată câtul dintre diferenţiala funcţiunii şi diferenţiala variabilei.

Ca să calculăm o derivată, determinăm mai întâi creşterea infinit mică dy ce o capătă funcţiunea, atunci când variabila creşte cu o cantitate, de asemenea infinit mică, dx. Apoi facem raportul dintre dy şi dx; valoarea acestui raport reprezintă tocmai *derivata* funcţiunii date. Acesta este planul de lucru, de care trebue să ţinem seamă, la calcularea oricărei derivate.

Dacă intrăm mai în amănuntele acestui plan de lucru, găsim că aflarea unei derivate necesită patru operaţiuni:

Operaţia I-a: luăm funcţia propusă şi dăm variabilei x o creştere diferenţială dx. Aceasta revine în a înlocui pe x cu $x+dx$, în expresiunea dată şi pe y prin $y+dy$. Apoi facem toate desvoltările şi reducerile necesare.

Operaţia II-a: calculăm creşterea diferenţială dy a funcţiunii. In acest scop, din expresiunea finală, obţinută în operaţia precedentă, scădem expresiunea iniţială a funcţiunii propuse. Facem iarăşi toate reducerile necesare.

Operaţia III-a: împărţim cu dx ambii membri ai relaţiunei obţinută în operaţia precedentă. Apare astfel în membrul I raportul celor două diferenţiale, dy şi dx, iar în membrul II găsim cantităţi finite şi cantităţi infinit mici.

Operaţia IV-a: lepădăm în membrul II toate cantităţile infinit mici, adică toţi factorii ce cuprind diferenţiala dx. (Sau, cum spun matematicienii, *facem să tindă către zero diferenţiala* dx). Ceea ce obţinem este derivata funcţiunii propuse.

S'ar părea la început, că aflarea unei derivate cere de fiecare dată un calcul lung şi anevoios. Dacă pentru fiecare funcţiune dată, am proceda conform celor patru operaţiuni, calcularea unei derivate ar fi, în adevăr, destul de lungă şi — de ce să nu recunoaştem? — destul de plictisitoare.

Matematicienii s'au arătat şi aici oameni ingenioşi: ei au găsit câteva reguli simple, ce îngăduie scrierea imediată a derivatei, fără să mai trecem prin cele patru operaţiuni. Cu modul acesta, calcularea unei derivate se face oarecum «automat», repede şi cu toată exactitatea. Fiecare regulă se aplică la un anumit «tip» de funcţiune; şi nu-s multe reguli, căci nu-s nici prea multe tipuri generale de funcţiuni.

Pentru a stabili o *regulă de derivare*, se consideră un anumit tip de funcţiune şi se calculează derivata pe calea directă, urmând cele patru operaţiuni pomenite mai sus. Expresiunea obţinută ne dă putinţa să scriem derivata oricărei alte funcţiuni, de tipul considerat.

Vom stabili în acest capitol *regula de derivare* a unei *puteri:* vom considera, deci, ca funcţie tip, variabila x ridicată la o putere oarecare n:

$$y = x^n$$

In cărţile oficiale, derivata acestei funcţiuni se studiază direct; cum acest procedeu cere o îndemânare mai mare la calcul, noi vom alege o cale mai puţin directă, mai puţin elegantă, dar mai simplă şi mai uşor de înţeles.

Să pornim dela funcţiunea cercetată în capitolele precedente:

$$y = x^2$$

în care variabila este ridicată la puterea a 2-a. Am văzut că derivata acestei funcţiuni este:

$$y' = 2x.$$

Să trecem mai departe, la funcțiunea imediat următoare, de același tip:

$$y = x^3 \qquad (1)$$

și să începem calcularea derivatei, urmând pas cu pas cele patru operațiuni cunoscute.

Operația I-a: dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce are ca rezultat o creștere dy, de asemenea infinit mică, pentru funcțiune:

$$y + dy = (x + dx)^3.$$

Desvoltăm [1]) paranteza din membrul II:

$$y + dy = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3. \qquad (2)$$

Operația II-a: din expresiunea (2) scădem membru cu membru, expresiunea inițială (1):

$$y + dy - y = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 - x^3.$$

Reducem termenii asemenea și ne rămâne:

$$dy = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3.$$

Operația III-a: împărțim cu dx ambii membri ai acestei relațiuni:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x.dx + (dx)^2.$$

Operația IV-a: lepădăm în membrul II ultimii doi termeni, ce cuprind infinit mici. Obținem astfel derivata:

$$y' = 3x^2.$$

---

[1]) Paranteza este de forma: $(a + b)^3$, care prin desvoltare dă:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Dacă procedăm în mod analog și pentru funcțiunea imediat următoare, de același tip:

$$y = x^4,$$

găsim că derivata ei este:

$$y' = 4x^3.$$

Să căutăm acum *regula de derivare* pentru funcțiunile de acest tip. Cu rezultatele căpătate mai sus, putem alcătui următorul tablou:

Funcțiunea	$y = x^2$	are derivata	$y' = 2x$
»	$y = x^3$	» »	$y' = 3x^2$
»	$y = x^4$	» »	$y' = 4x^3$

Observăm în acest tablou, că exponentul lui x este totdeauna mai mic cu o unitate în derivată, față de funcțiune. Bunăoară, în exemplul al doilea, x are exponentul 3 în funcțiune iar în derivată are exponentul 2; în exemplul al treilea, x are exponentul 4 în funcțiune și 3 în derivată. Prin generalizare, vom spune că: *dacă în funcțiune variabila este la puterea n, ea are în derivată o putere mai mică cu o unitate, adică n—1.*

Mai observăm că, în derivată, coeficientul lui x este tocmai exponentul lui din funcțiune. De pildă: în primul exemplu, coeficientul lui x este în derivată 2; dar numărul 2 este exponentul lui x în funcțiunea corespunzătoare. In exemplul al doilea, coeficientul lui x este în derivată 3; iar cifra 3 este exponentul lui x în funcțiune. Să generalizăm și această constatare: *dacă în expresia funcțiunii variabila este la puterea n, coeficientul variabilei are în derivată aceeași valoare n.*

Să închidem într'o formulă matematică aceste două constatări generale. Pentru funcțiunea:

$$y = x^n, \qquad (3)$$

derivata este:

$$y' = nx^{n-1}. \qquad (4)$$

Aşa dar, *când funcţiunea constă din variabila independentă, ridicată la puterea n, derivata se reprezintă printr'un produs de doi factori: primul factor este n iar al doilea factor este variabila ridicată la puterea n—1.*

Exemplu: funcţiunea

$$y = x^5$$

este de tipul precedent, căci cuprinde variabila x ridicată la puterea $n=5$. Conform regulii precedente, vom scrie derivata:

$$y' = nx^{n-1} = 5x^4.$$

De asemenea, funcţiunea:

$$y = x^{80}$$

are derivata:

$$y' = 80x^{79}.$$

Stăpânind regula de derivare pentru funcţiunile de tipul considerat, să trecem la câteva aplicaţiuni mai însemnate.

Considerăm cazul simplu, când funcţiunea se reduce la variabila singură:

$$y = x. \qquad (5)$$

Pentru a scrie derivata, utilizând regula generală de mai sus, trebue să ne reamintim următoarele proprietăţi:

1. Dacă unei mărimi nu i se indică exponentul, înseamnează că acea mărime are exponentul 1. (Vezi observaţia I dela sfârşitul acestui capitol). Deci formula (5) se mai poate scrie:

$$y = x^1. \qquad (6)$$

2. Orice mărime ridicată la puterea *zero* este egală cu unitatea (vezi observaţia II dela sfârşitul acestui capitol). Aşa dar,

$$a^0 = b^0 = 7^0 = 25^0 = x^0, \text{ etc.} \ldots = 1.$$

Cunoscând aceste proprietăţi, să scriem derivata funcţiunii (6), luând formula generală $y' = nx^{n-1}$. In cazul funcţiunii noastre, $n=1$. Avem:

$$y' = 1.x^{1-1} = 1.x^0 = 1 \times 1 = 1.$$

Deci, când funcţiunea se reduce la variabila singură, derivata ei este egală cu unitatea.

Bine înţeles că la acest rezultat ajungem şi pe calea mai lungă, prin cele patru operaţiuni. In adevăr, să dăm variabilei creşterea dx, ceea ce are ca rezultat creşterea dy pentru funcţiune. Atunci formula (5) devine:

$$y + dy = x + dx.$$

Scădem din această relaţie funcţiunea iniţială (5):

$$y + dy - y = x + dx - x$$

şi, făcând reducerile, ne rămâne:

$$dy = dx,$$

de unde:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1,$$

adică rezultatul cunoscut.

Tot după regula generală, stabilită mai sus, putem calcula şi derivata unui radical, ştiind că orice radical reprezintă o putere (vezi observaţia IV-a dela sfârşitul acestui capitol). In adevăr, să luăm funcţiunea:

$$y = \sqrt{x} \qquad (7)$$

care se mai poate scrie:

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

Se vede că funcţiunea dată constă din variabila indepen-

dentă ridicată la puterea $n=\frac{1}{2}$. Vom scrie deci derivata, după regula generală:

$$y'=\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$$

Observăm că în expresiunea derivatei a apărut un *exponent negativ*. Se ştie că mărimea dotată cu un exponent negativ reprezintă o fracţie, la care numărătorul este unitatea, iar numitorul este acea mărime, ridicată la aceeaşi putere, de astă dată pozitivă (vezi observaţia III dela sfârşitul acestui capitol). In cazul de faţă, avem:

$$x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

Prin urmare, derivata funcţiunei (7) este:

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

sau, ştiind că $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, mai putem scrie:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (8)$$

Să verificăm acest rezultat, calculând derivata pe cale directă, prin cele patru operaţiuni.

Când variabila x primeşte creşterea dx, funcţiunea y capătă creşterea dy. Atunci formula (7) devine:

$$y+dy=\sqrt{x+dx}. \qquad (9)$$

Scădem expresiunea iniţială (7) din expresiunea finală (9):

$$y+dy-y=\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$$

şi reducem termenii asemenea din membrul I; obţinem:

$$dy=\sqrt{x+dx}-\sqrt{x} \qquad (10)$$

Pentru ca să facem reduceri şi în membrul II, trebue să intervenim cu un *artificiu de calcul*. Anume, înmulţim şi împărţim membrul II cu cantitatea $\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}$:

$$dy=\frac{(\sqrt{x+dx}-\sqrt{x})(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} \qquad (11)$$

In felul acesta nu schimbăm cu nimic valoarea expresiunei (10), căci factorul care a apărut la numărător se reduce cu numitorul.

Să privim cele două paranteze dela numărător: una din paranteze cuprinde suma a doi factori, cealaltă cuprinde diferenţa celor doi factori. Adică, la numărător avem un *produs de sumă prin diferenţă*. Se ştie din algebră că un produs de sumă prin diferenţă este egal cu diferenţa patratelor termenilor. De pildă:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Deci, pentru numărătorul din formula (11) avem:

$$(\sqrt{x+dx}-\sqrt{x})\;(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})=(\sqrt{x+dx})^2-(\sqrt{x})^2$$

Un radical simplu, ridicat la patrat, reprezintă tocmai mărimea aflată sub radical. Prin urmare, în cazul nostru, avem:

$$(\sqrt{x+dx})^2-(\sqrt{x})^2=x+dx-x=dx.$$

Aşa dar, cele două paranteze impunătoare din expresiunea (11) nu reprezintă altceva decât un biet dx! Ca şi în vâltoarea socială: indivizi cari nu reprezintă mai nimica în viaţă, au de cele mai multe ori expresiuni impunătoare, sfidând lumea din jurul lor. Când îi descoşi însă mai bine, aşa cum am descusut şi noi aici numără-

torul formulei (11), găseşti că şi ei nu reprezintă altceva decât un biet dx social.

Dar să revenim la calculul nostru. Prin artificiul de calcul ce l-am făcut, expresiunea (11) s'a transformat în:

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}.}$$

Impărţim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}$$

şi lepădăm infinitul mic dx din membrul II; obţinem:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

adică tocmai formula (8). Ceea ce era de demonstrat. Sau, cum spun matematicienii pe latineşte: *quod erat demonstrandum* (prescurtat prin Q. E. D.).

Trecem la cazul general, când funcţiunea dată cuprinde un radical de ordinul n al variabilei ridicată la puterea m:

$$y = \sqrt[n]{x^m} \qquad (12)$$

Exemplul precedent este un caz particular al acestei funcţiuni, pentru $n=2$ şi $m=1$.

Ca să aflăm derivata funcţiunii (12), înlocuim radicalul printr'un exponent fracţionar:

$$y = x^{\frac{m}{n}}$$

şi procedăm apoi după regula generală:

y' = exponentul × variabila ridicată la puterea dată, mai puţin o unitate.

Adică:

$$y' = \frac{m}{n} \times x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} \times x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Să luăm un exemplu numeric:

$$y = \sqrt[5]{x^3}$$

Inlocuim radicalul printr'un exponent fracţionar:

$$y = x^{\frac{3}{5}}$$

şi scriem derivata după regula generală:

$$y' = \frac{3}{5} \times x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\, x^{-\frac{2}{5}}$$

Cum în această expresiune x este la o putere negativă, să-l reprezentăm în modul cunoscut, printr'o fracţie:

$$y' = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

Facem trecerea inversă, dela exponent fracţionar la radical:

$$y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

obţinând astfel derivata funcţiunii propuse.

Calculul precedent ne-a dovedit că regula generală, pentru aflarea derivatei, când funcţiunea este de forma x , este valabilă şi când n este un număr întreg, şi când n este un număr fracţionar. Ne mai rămâne să arătăm că regula îşi păstrează valabilitatea şi când exponentul n

este negativ. Pentru aceasta, să considerăm funcțiunea:

$$y = x^{-2} \tag{12}$$

și să calculăm derivata, aplicând regula generală:

y' = exponentul × variabila ridicată la puterea dată mai puțin o unitate,

deci:

$$y' = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3}.$$

Să verificăm acest rezultat, calculând derivata în mod direct, cu ajutorul celor patru operațiuni. Vom face mai întâi transformarea cunoscută, scriind expresiunea (12) sub forma de fracție:

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}. \tag{13}$$

Dăm variabilei o creștere dx; funcțiunea y primește, în consecință, o creștere dy. Formula (13) se scrie atunci:

$$y + dy = \frac{1}{(x + dx)^2}. \tag{14}$$

Scădem expresiunea inițială (13) din expresiunea finală (14):

$$y + dy - y = \frac{1}{(x + dx)^2} - \frac{1}{x^2}.$$

In membrul I se reduce y și ne rămâne numai dy. In membrul II aducem fracțiunile la același numitor, pentru a face scăderea. Reamintim cum se face aducerea a două fracțiuni la același numitor: *se înmulțesc ambii termeni ai fracțiunei întâia cu numitorul fracțiunei a doua, și ambii termeni ai fracțiunei a doua cu numitorul fracțiunei întâia.*

Obținem astfel două fracțiuni, cu același numitor. Scăderea acestor fracțiuni se face acum foarte simplu: se face scăderea la numărător, lăsând numitorul neschimbat. Aplicând această regulă la cazul nostru, avem:

$$dy = \frac{x^2}{(x + dx)^2 x^2} - \frac{(x+dx)^2}{(x + dx)^2 x^2}$$

facem scăderea la numărător:

$$dy = \frac{x^2 - (x + dx)^2}{(x + dx^2)} = \frac{x^2 - x^2 - 2x.dx - (dx)^2}{x^2(x + dx)^2}$$

și reducând termenii asemenea, rămâne:

$$dy = \frac{-2x.dx - (dx)^2}{x^2(x + dx)^2}$$

Impărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - dx}{x^2(x + dx)^2}$$

și lepădăm infinit micii din membrul II:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2.x^2}$$

sau încă:

$$y' = -2x^{-3}$$

adică rezultatul așteptat.

OBSERVAȚIUNI

I. In matematică, orice mărime se consideră dotată cu un exponent; când exponentul are valoarea 1, el nu se mai scrie, căci prezența lui nu indică nicio operație de calcul. In adevăr, știm că, pentru a împărți una prin alta două puteri ale aceleiași mărimi, scădem exponentul

împărțitorului din exponentul deîmpărțitului. De pildă:

$$\frac{7^4}{7^2} = \frac{7\times7\times7\times7}{7\times7} = 7^2$$

Câtul obținut se compune din aceeași mărime 7, ridicată la o putere egală cu diferența puterilor: 4—2 = 2.

Să luăm și exemplul:

$$\frac{2^3}{2^2} = \frac{2\times2\times2}{2\times2} = 2.$$

După regula spusă mai sus, câtul ar trebui să fie $2^{3-2} = 2^1$. Acest rezultat nu poate să fie decât identic cu cel găsit direct, prin împărțire. Deducem deci că:

$$2^1 = 2;$$

adică, *prezența exponentului 1 nu aduce nicio modificare mărimei respective.* Și deci se poate spune că, *orice mărime scrisă fără exponent are, în realitate, exponentul 1.*

II. In calculele matematice apare de nenumărate ori exponentul zero. Ce poate să reprezinte o mărime, ridicată la puterea zero? Pentru a răspunde la această întrebare, să considerăm un calcul simplu, care ne scoate înainte un exponent zero. Bunăoară:

$$\frac{5^3}{5^3} = \frac{5\times5\times5}{5\times5\times5} = 1.$$

Dar la valoarea acestui cât putem ajunge și pe altă cale, prin regula de împărțire de care ne-am folosit în exemplul precedent. Anume:

$$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$$

Aceste două rezultate fiind identice, deducem:

$$5^0 = 1.$$

și prin generalizare, ajungem să enunțăm că: *orice mărime ridicată la puterea zero este egală cu unitatea.*

III. Noțiunea de exponent negativ este, de asemenea, una din curiozitățile matematicei. Înțelegem foarte bine ce înseamnă 4^2: este 4×4. Dar 4^{-2}? Pentru a descoperi sensul exponentului negativ, vom lua un calcul simplu, care ne pune în față un astfel de exponent. De pildă:

$$\frac{4^2}{4^4} = \frac{4\times4}{4\times4\times4\times4} = \frac{1}{4\times4} = \frac{1}{4^2}.$$

Dacă aplicăm regula de împărțire a puterilor, găsim pentru valoarea acestui cât:

$$\frac{4^2}{4^4} = 4^{2-4} = 4^{-2}.$$

Cele două rezultate fiind identice, urmează că:

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2}.$$

Să generalizăm: *orice mărime dotată cu un exponent negativ reprezintă o fracție, ce are ca numărător unitatea, iar ca numitor mărimea considerată, având același exponent, dar pozitiv.*

IV. Pentru a termina cu cercetarea exponenților curioși, să ne ocupăm și de sensul *exponentului fracționar.* Noi știm că:

$$3^2 = 9 \qquad (15)$$

sau:

$$3 = \sqrt{9}. \qquad (16)$$

Să ridicăm ambii membri ai relației (15) la puterea $\frac{1}{2}$, făcând calculul după regula cunoscută: pentru a ridica o mărime la două puteri succesive, luăm acea mărime și-i dăm ca exponent produsul exponenților. In cazul nostru, avem:

$$3^{2\times\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

sau

$$3^{\frac{2}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

sau

$$3 = 9^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

In formulele (16) și (17), membrul I fiind identic, membrul II va fi și el identic. Deci, putem scrie:

$$\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Această relație ne descoperă sensul exponentului fracționar. Precum se vede, un astfel de exponent indică existența unui radical; iată o primă constatare de mare folos!

Reamintim că orice radical se definește prin *indicele* său, care se scrie sus, la stânga radicalului. Bunăoară, extragerea rădăcinii cubice a lui 27 se reprezintă prin $\sqrt[3]{27}$, unde 3 este indicele radicalului. Extragerea rădăcinii patrate a lui 9 se scrie $\sqrt{9}$; aici indicele este 2; deci radicalul ar trebui să fie scris astfel $\sqrt[2]{9}$. Cu toate acestea, indicele 2 nu este scris! Nu este scris, dar se presupune că ar fi scris! De ce nu este scris? Pentrucă radicalul, ce exprimă extragerea rădăcinii patrate apare atât de des în calcule, încât matematicienii — oameni comozi — s'au gândit să-i simplifice reprezentarea: ei au

făcut convenția ca indicele 2 să nu se mai scrie. Și deci, *un radical lipsit de indice, reprezintă totdeauna extragerea rădăcinii patrate, fiind presupus cu indicele 2.*

Relația (18), scrisă complet, cu indicele radicalului și cu exponentul câtimei de sub radical, se prezintă astfel:

$$\sqrt[2]{9^1} = 9^{\frac{1}{2}}.$$

Observăm că cifrele mici, care împodobesc membrul I al acestei formule, se regăsesc și în exponentul fracționar din membrul II. Anume: indicele 2 al radicalului este identic cu numitorul exponentului fracționar $\frac{1}{2}$; iar exponentul 1 al câtimei de sub radical este tocmai numărătorul fracțiunii considerate.

Să generalizăm această constatare. *Orice radical se poate pune sub forma de exponent fracționar: numitorul exponentului este egal cu indicele radicalului iar numărătorul, cu exponentul cantității de sub radical.* De pildă:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

PROBLEME

Să se calculeze derivatele următoarelor funcțiuni:

1. $y = x^{20}$.
2. $y = \sqrt[5]{x}$.
3. $y = \frac{1}{x^6}$.
4. $y = \sqrt[3]{x^4}$.

CAPITOLUL VII

IN URMĂRIREA CONSTANTELOR

In expresiunea unei funcțiuni, variabila independentă este de cele mai multe ori întovărășită de una sau mai multe constante. Acestea sunt cantități fixe; când variabila independentă primește o creștere, constantele nu suferă nicio schimbare.

Situația constantelor, în formula unei funcțiuni, este de două feluri: unele constante se găsesc chiar alături de variabilă, fără niciun semn despărțitor; altele sunt despărțite de variabilă printr'un + sau —. De pildă, în funcțiunea:

$$y = 4x + 2$$

cifrele 4 și 2 sunt constante. Cifra 4 se află chiar alături de variabilă, fără niciun semn despărțitor, iar cifra 2 este legată de variabilă prin semnul +.

Constanta care se află alături de variabilă, fără niciun semn despărțitor, poartă numele de «*coeficientul*» variabilei. In expresiunea de mai sus, coeficientul variabilei este 4.

Ne vom ocupa în acest capitol cu constantele funcțiunilor: ce se întâmplă cu ele, atunci când facem calculul derivatei? Care din ele reușesc să intre în formula derivatei și care se pierd pe drum?

Bănuim că cititorul a prins cu ușurință scopul practic al acestor întrebări. E vorba de calcularea derivatei în mod oarecum «automat», fără să mai trecem prin cele patru operațiuni. Ca să putem face un astfel de calcul automat, trebue să cunoaștem soarta constantelor în decursul derivării. Să știm, adică, ce poziție ocupă ele în formula derivatei.

In acest scop, vom considera mai întâi un caz simplu: funcțiunea are o singură constantă, coeficientul variabilei. De pildă:

$$y = 3x^2. \qquad (1)$$

Să calculăm derivata acestei funcțiuni, urmând pas cu pas cele patru operațiuni.

Dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce are ca rezultat o creștere infinit mică dy pentru funcțiune:

$$y + dy = 3(x + dx)^2.$$

Vedem bine, chiar de pe acum, că aceste două creșteri nu influențează constanta 3. Să continuăm însă calculul, desvoltând paranteza din membrul II:

$$y + dy = 3\,x^2 + 2x.dx + (dx)^2\}. \qquad (2)$$

Scădem expresiunea inițială (1) din expresiunea finală (2):

$$y + dy - y = 3x^2 + 3 \times 2x.dx + 3(dx)^2 - 3x^2.$$

In membrul I se reduce y iar în membrul II se reduce $3x^2$. Ne rămâne:

$$dy = 3 \times 2x.dx + 3(dx)^2.$$

Impărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = 3 \times 2x + 3.dx$$

și lepădăm ultimul termen $3.dx$, fiind infinit mic, în curs de dispariție. Obținem astfel derivata:

$$y' = 3 \times 2x = 6x.$$

Așa dar, pentru funcțiunea dată, $y = 3x^2$ am obținut derivata $y' = 3 \times 2x$. Pentru funcțiunea $y = x^2$ am obținut în capitolul precedent derivata $y' = 2x$. Dar prima funcțiune se deosebește de a doua prin coeficientul 3 al variabilei; se vede bine că aceeași deosebire este și între derivatele lor. Tragem de aici concluzia că: *derivata păstrează neschimbat coeficientul variabilei independente.*

Să generalizăm: am văzut, în capitolul precedent, că, pentru funcțiunea:

$$y = x^n$$

derivata este:

$$y' = nx^{n-1}. \qquad (3)$$

Să luăm o altă funcțiune, deosebită de precedenta prin coeficientul a al variabilei:

$$y = ax^n.$$

Pe baza constatării făcute mai sus, derivata va fi:

$$y' = nax^{n-1}$$

adică păstrăm în derivată coeficientul lui x din expresiunea funcțiunii.

Iată o aplicație numerică. Se dă funcțiunea:

$$y = 4x^6$$

ce este de forma $y = ax^n$, unde $a = 4$ și $n = 6$. Pe baza celor spuse mai sus derivata este:

$$y' = nax^{n-1} = 6 \times 4x^{6-1} = 24x^5.$$

Luăm un alt exemplu:

$$y = \frac{2}{3} x^3$$

și această funcțiune este tot de forma $y = ax^n$, unde $a = \frac{2}{3}$ și $n = 3$. Vom scrie deci derivata:

$$y' = nax^{n-1} = 3 \times \frac{2}{3} x^{3-1} = 2x^2.$$

După ce am lămurit soarta coeficientului ce însoțește variabila, să trecem la cazul interesant, când funcțiunea este o constantă k:

$$y = k.$$

Cititorul observă neîndoios, că exprimarea de mai sus nu prea este logică, nu prea este corectă. Cum ar putea să fie o funcțiune egală cu o constantă? De îndată ce o expresiune algebrică se reduce la o constantă, ea nu mai poate fi tratată ca o funcțiune; unde este variabila, care intră totdeauna în formula unei funcțiuni? Când o expresie nu e susceptibilă de variație, ea nu este «funcțiune». Deci, expresiunea precedentă nefiind o funcțiune, nu are derivată. Matematicienii enunță acest fapt într'un mod mai grav, mai serios: *când funcțiunea se reduce la o constantă, derivata ei este nulă.*

La acest rezultat se mai ajunge și pe altă cale, utilizând formula (3). Dar această formulă presupune existența variabilei indepndente x; să facem deci, ca în formulaa dată $y = k$, să apară și o variabilă independentă, funcțiune rămânând totuși constantă.

Veți spune: acest lucru e cu neputință! Cum se poate ca o formulă, în care există o variabilă independentă, să rămână constantă? Și, totuși, se poate! Vedeți, aici e partea atractivă și surprinzătoare a matematicei: îți dă putința să înfăptuiești lucruri, pe care gândirea obișnuită nu le poate admite. In cazul de față, soluția este tot așa de ușoară ca și oul lui Columb!

In adevăr, oricare ar fi valoarea variabilei, simbolul x^0 este, după cum știm, totdeauna egal cu unitatea. Formula $y = k$ este deci identică cu:

$$y = kx^0.$$

Iată că am reușit să punem expresiunea dată sub forma unei relații între funcțiunea y și variabila x. Această

relație este de forma $y=ax^n$, unde $a=k$ și $n=0$; vom calcula derivata după formula cunoscută:

$$y' = nax^{n-1} = 0 \times kx^{0-1}.$$

Această derivată se compune dintr'un produs de factori, unul din ei fiind zero; din această cauză, întregul produs este egal cu zero. Și deci:

$$y' = 0.$$

Am regăsit astfel, pe o cale diferită, enunțul că: *derivata unei constante este zero*, adică nu există.

Să cercetăm acum o funcțiune, în care constanta se adaugă variabilei independente; de pildă:

$$y = 2x + 6. \qquad (4)$$

Pentru a stabili ce se întâmplă cu constanta 6, dacă trece sau nu trece în derivată, dacă rezistă la drum sau se pierde pe drum, vom proceda ca de obicei, făcând calculul direct, cu cele patru operațiuni cunoscute.

Când x primește creșterea infinit mică dx, funcțiunea y crește cu dy:

$$y + dy = 2(x + dx) + 6, \qquad (5)$$

termenul 6 fiind o constantă, el nu e influențat de aceste creșteri. Scădem din (5) pe (4):

$$y + dy - y = 2(x + dx) + 6 - (2x + 6).$$

Reducem termenul asemenea din membrul I iar în membrul II desfacem paranteza:

$$dy = 2x + 2dx + 6 - 2x - 6$$

reducând și aici termenii asemenea, ne rămâne:

$$dy = 2.dx$$

de unde:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2.$$

Observăm că constanta adițională 6, din formula funcțiunii, nu se găsește în derivată. Ea a dispărut pe drum, când am scăzut funcția inițială din funcția finală.

Prin generalizare, ajungem să enunțăm că: *prin derivarea unei funcțiuni, constantele legate de variabilă prin semnul + sau — dispar.*

Se înțelege atunci că, toate funcțiunile care diferă între ele printr'o constantă, au aceeași derivată. Bunăoară, funcțiunile:

$$y = 2x + 6$$

$$y = 2x + 18$$

$$y = 2x + \frac{3}{5}$$

ce au aceeași structură, dar se deosebesc între ele numai prin valoarea constantei adiționale, au toate aceeași derivată:

$$y' = 2.$$

PROBLEME

Să se calculeze derivatele funcțiunilor următoare:

1. $y = 2x^7$.

2. $y = \frac{5}{2}\sqrt[3]{x^6}$.

3. $y = 8x^3 + 1$.

4. $y = \frac{9x^3 - 4}{3}$.

CAPITOLUL VIII

CUM SE CALCULEAZĂ DERIVATA UNEI SUME DE MAI MULTE FUNCȚIUNI

Până acum am cercetat funcțiuni simple, de forma generală:

$$y = ax^n + b$$

unde primul termen cuprinde variabila aflată la o putere oarecare, iar celălalt termen este o constantă; a și n sunt, de asemenea, constante. Am văzut că derivata unei astfel de funcțiuni este:

$$y' = nax^{n-1}.$$

Trecem la un caz ceva mai complicat, întâlnit foarte des în calculele algebrice și în aplicațiunile lor: e vorba de derivata mai multor funcțiuni, unite între ele prin semnul + sau —. Cu alte cuvinte, e vorba de derivata sumei algebrice a mai multor funcțiuni.

Să luăm, de pildă, funcțiunea:

$$y = x^2 + 2x \qquad (1)$$

unde membrul II cuprinde doi termeni și în fiecare din ei figurează variabila x. In capitolele precedente, noi am întâlnit funcțiuni de forma:

$$y = x^2 \quad \text{și} \quad y = 2x$$

care, după cum se vede, nu sunt decât termenii funcțiunii (1). Deci, fiecare termen al funcțiunii (1) se poate considera el singur, ca o funcție de x. Să însemnăm cu u funcțiunea reprezentată de primul termen și cu v funcțiunea reprezentată de celălalt termen:

$$u = x^2 \quad \text{și} \quad v = 2x. \qquad (2)$$

Să introducem aceste notațiuni în (1):

$$y = u + v.$$

Această formulă arată foarte bine că y este suma a două funcțiuni de x.

In acest capitol, vom căuta să stabilim *regula de derivare* pentru acest fel de funcțiuni. Vom proceda în modul cunoscut, trecând prin cele patru operațiuni de calcul.

Dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce face ca funcțiunea y să crească cu dy:

$$y + dy = (x + dx)^2 + 2(x + dx) \qquad (3)$$

Desvoltăm parantezele din membrul II:

$$y + dy = x^2 + 2x.dx + (dx)^2 + 2x + 2dx$$

Scădem din această expresiune funcțiunea inițială (1):

$$y + dy - y = x^2 + 2x.dx + (dx)^2 + 2x + 2dx - x^2 - 2x.$$

In membrul I reducem pe y; în membrul II reducem termenii asemenea x^2 și $2x$; ne rămâne:

$$dy = 2x.dx + (dx)^2 + 2.dx.$$

Impărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx + 2,$$

și lepădăm termenul infinit mic dx:

$$y' = 2x + 2. \qquad (4)$$

Este derivata funcțiunei (1).

Această expresiune se poate obține și pe o altă cale, mai simplă. Anume, să calculăm derivata fiecăreia din funcțiunile u și v. Pentru funcțiunea u vom însemna derivata cu u', așa după cum, pentru funcțiunea y am reprezentat derivata prin y'. Și după cum $y' = \frac{dy}{dx}$, tot astfel $u' = \frac{du}{dx}$.

Am văzut că $u = x^2$; după cele învățate până acum, putem scrie imediat derivata:

$$u' = 2x.$$

Pentru funcțiunea $v = 2x$, avem derivata:

$$v' = 2.$$

Să adunăm aceste două derivate:

$$u' + v' = 2x + 2.$$

Să comparăm această expresiune cu formula (4): constatăm că membrul II este identic la amândouă. Urmează atunci că și membrul I este identic, adică avem:

$$y' = u' + v' \qquad (5)$$

Deci, *derivata unei sume de mai multe funcțiuni este egală cu suma derivatelor funcțiunilor.*

Acuma, după ce am făcut cunoștință cu funcțiunile u și v și ne-am obișnuit cu ele și cu derivatele lor u' și v', putem să arătăm că regula precedentă se obține și pe o cale mai simplă. Vom expune și această cale, deoarece ea ne va fi de folos în capitolul următor.

Am văzut că funcțiunea:

$$y = x^2 + 2x$$

se mai poate scrie:

$$y = u + v,$$

considerând pe u și v ca funcțiuni de x și anume:

$$u = x^2 \qquad \text{și} \qquad v = 2x. \qquad (6)$$

Când x crește cu o cantitate infinit mică dx, devenind $x + dx$, toate cele trei funcțiuni y, u și v primesc, în consecință, creșteri corespunzătoare: y devine $y + dy$, u devine $u + du$ iar v devine $v + dv$. In demonstrația precedentă am determinat creșterea dy în raport cu dx, printr'un calcul destul de lung. Calculul este cu mult mai scurt, dacă determinăm creșterea dy în raport cu creșterile du și dv.

In adevăr, când intervin creșterile dy, du și dv, funcțiunea considerată, $y = u + v$ devine:

$$y + dy = u + du + v + dv \qquad (7)$$

iar funcțiunile parțiale u și v devin fiecare:

$$\begin{aligned} u + du &= (x + dx)^2 \\ v + dv &= 2(x + dx) \end{aligned} \qquad (8)$$

Se vede ușor că expresiunea (7) este identică cu (3), dacă ținem seamă de relațiunile (8).

Pentru a obține creșterea dy, procedăm ca de obicei, făcând diferența dintre expresiunea finală și expresiunea inițială a funcțiunei:

$$y + dy - y = u + du + v + dv - u - v.$$

Reducem termenii asemenea și ne rămâne:

$$dy = du + dv.$$

Impărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Fiecare termen din această relație reprezintă raportul dintre creșterea infinit mică a funcțiunii respective și creșterea infinit mică a variabilei; deci fiecare termen reprezintă derivata funcțiunii respective:

$$y' = u' + v'.$$

Am obținut astfel formula (5) pe o cale mai simplă, fără desvoltări de paranteze și fără reduceri de termeni asemenea

Să facem o aplicație numerică. Luăm funcțiunea:

$$y = 3x^2 - 4x + 5$$

care reprezintă o sumă de mai multe funcțiuni de x. Pentru a-i calcula derivata y', vom lua fiecare termen în parte și-i vom scrie derivata. Apoi vom însuma algebric toate derivatele găsite:

Derivata lui $3x^2$ este $2 \times 3x = 6x$
» » $-4x$ » $= -4$
» » 5 » $= 0$

Adunând toate aceste derivate, obținem derivata funcțiunii propuse:

$$y' = 6x - 4.$$

PROBLEME

Să se calculeze derivatele funcțiunilor:

1. $y = ax^2 + bx + c.$
2. $y = 3ax^2 - x^{-2}.$
3. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$

CAPITOLUL IX

DESPRE DERIVATA PRODUSULUI MAI MULTOR FUNCȚIUNI

Intâlnim adeseaori în calcule expresiuni de felul următor:

$x \cdot \log x$

$x^n \cdot \sin x$

etc., care, după cum se vede, reprezintă câte un produs de două funcțiuni. In primul exemplu, una din funcțiuni este x, cealaltă este $\log x$; în al doilea exemplu, o funcțiune este x^n, cealaltă funcțiune este $\sin x$. Și exemplele se pot înmulți. Putem întâlni și produse de trei, patru sau chiar mai multe funcțiuni. In toate aceste cazuri, se pune întrebarea: după care regulă calculăm derivata? Căci a proceda de fiecare dată în mod direct, prin cele patru operațiuni învățate, ar fi un adevărat chin și o curată pierdere de vreme.

Ne propunem, așa dar, să stabilim regula pentru calcularea derivatei unui produs de mai multe funcțiuni. In acest scop, vom considera un exemplu simplu, care să ne îngăduie și o verificare directă.

Luăm funcțiunile:

$$u = 2x^2 \quad \text{și} \quad v = 3x$$

și însemnăm cu y produsul lor:

$$y = uv = 2x^2 \times 3x = 6x^3.$$

Aici produsul celor două funcțiuni dă un rezultat simplu, ce are ca derivată:

$$y' = 3 \times 6^{3-1} = 18x^2$$

dar așa ceva nu se întâmplă totdeauna. De pildă, în exemplele citate la început, cele două funcțiuni nu se pot contopi într'una singură, ci fiecare se păstrează separat. De aceea este nevoie să găsim o regulă pentru calcularea derivatei în cazul general, când funcțiunile u și v își păstrează individualitatea lor în produs.

Luăm funcțiunea y, definită de produsul funcțiunilor u și v:

$$y = uv. \tag{1}$$

Cum u și v sunt funcțiuni de x, aceasta înseamnă că, dând lui x o creștere infinit mică dx, amândouă func-

țiunile vor crește: funcțiunea u crește cu du iar funcțiunea v cu dv. La rândul ei, y fiind funcțiune și de u și de v, primește și ea o creștere infinit mică, dy.

Cele trei mărimi din (1) devin acum: $u+du$, $v+dv$ și $y+dy$. In consecință, relația (1) se prezintă sub forma:

$$y + dy = (u + du)\ (v + dv).$$

Facem înmulțirea din membrul II:

$$y + dy = uv + v\ du + u\ dv + du\ dv.$$

Scădem din această relație formula (1); ne rămâne:

$$dy = v\ du + u\ dv + du\ dv.$$

Observăm că termenul ultim din membrul II este un produs de doi infinit mici. Vom neglija acest termen, așa după cum am lepădat până acum infinitul mic la patrat (căci un infinit mic la patrat nu reprezintă altceva decât produsul a doi infinit mici). Din formula precedentă ne rămâne, așa dar:

$$dy = v\ du + u\ dv.$$

Impărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Cunoaștem fracțiunile din membrul II: fiecare din ele reprezintă câte o derivată:

$$y' = vu' + uv'. \qquad (2)$$

Am obținut formula după care umblam. Ea ne spune că, derivata unui produs de două funcțiuni este alcătuită din două părți, și fiecare parte cuprinde produsul uneia din funcțiuni, prin derivata celeilalte. Mai precis: *pentru a forma derivata unui produs de două funcțiuni, luăm prima funcțiune și o înmulțim cu derivata funcțiunei a doua; luăm apoi funcțiunea a doua și o înmulțim cu derivata primei funcțiuni. La sfârșit facem suma algebrică a celor două produse obținute.*

Să calculăm după această regulă derivata produsului celor două funcțiuni $u=2x^2$ și $v=3x$, de care a fost vorba la începutul acestui capitol. Avem:

$$y = uv = 2x^2 \times 3x.$$

Funcțiunile u și v au derivatele:

$$u' = 4x \quad \text{și} \quad v' = 3.$$

Pentru a afla derivata y', luăm prima funcțiune $2x^2$ și o înmulțim cu derivata 3 a funcțiunei a doua; obținem:

$$2x^2 \times 3 = 6x^2.$$

Luăm funcțiunea a doua, $3x$, și o înmulțim cu derivata $4x$ a primei funcțiuni:

$$3x \times 4x = 12x^2.$$

Derivata y' este dată de suma produselor obținute:

$$y' = 6x^2 + 12x^2 = 18x^2$$

adică am obținut rezultatul așteptat.

Să luăm alt exemplu:

$$y = (4x^3 + 1)\ (5x - 3) \qquad (3)$$

și să calculăm derivata prin regula stabilită mai sus. Punem:

$$u = 4x^3 + 1 \quad \text{și} \quad v = 5x - 3.$$

Derivata fiecărei funcțiuni, în parte, este:

$$u' = 3 \times 4x^{3-1} = 12x^2$$

$$v' = 5,$$

Să aplicăm formula (2):

$$y' = vu' + uv' = (5x - 3)12x^2 + (4x^3 + 1)5.$$

Facem înmulțirile din membrul II:

$$y' = 60x^3 - 36x^2 + 20x^3 + 5$$

și făcând reducerile necesare:

$$y' = 80x^3 - 36x^2 + 5. \qquad (4)$$

Am obținut astfel derivata funcțiunii (3).

Putem calcula această derivată și pe altă cale, contopind dela început cele două funcțiuni u și v într'una singură, căci exemplul ales se pretează la așa ceva:

$$y = uv = 20x^4 + 5x - 12x^3 - 3.$$

Derivata acestei funcțiuni se calculează luând fiecare termen în parte:

$$y' = 4 \times 20x^3 + 5 - 3 \times 12x^2$$

sau:

$$y' = 80x^3 - 36x^2 + 5$$

adică exact același rezultat ca în (4).

Să considerăm acum o funcțiune u, ridicată la o putere oarecare n:

$$y = u^n \qquad (5)$$

u este o funcțiune de variabila independentă x, de pildă: $u = ax^2$ sau $u = 2x + b$, etc.

Noi știm să calculăm derivata funcțiunii asemănătoare $y = x^n$, pentru care derivata este $y' = nx^{n-1}$; cum vom calcula însă derivata în cazul de față, unde în locul lui x se găsește o funcție de x?

Iată cum. Facem mai întâi abstracție de faptul că u este funcție de x, că deci u variază din cauza variației lui x. Ne mulțumim deocamdată să știm că u variază, ca și cum ar fi o variabilă independentă. Când u primește o creștere infinit mică du, y crește și el cu dy; în felul acesta putem trata funcțiunea $y = u^n$ exact ca funcțiunea $y = x^n$. Și după cum pentru funcția $y = x^n$ avem:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1},$$

tot astfel și pentru funcția $y = u^n$ vom avea:

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}.$$

Ceea ce căutăm noi este însă derivata funcțiunei y, în raport cu variabila x, nu cu variabila u. Cu alte cuvinte, trebue să găsim mijlocul de a trece dela $\frac{dy}{du}$ la $\frac{dy}{dx}$; acest mijloc e următorul. Luăm identitatea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Spunem că această relație este o identitate, deoarece membrul I este identic cu membrul II. In adevăr, în membrul II, du dela numărător se reduce cu du dela numitor și ceea ce rămâne este $\frac{dy}{dx}$, adică exact raportul din membrul I. Să introducem în această identitate valoarea lui $\frac{dy}{du}$ scrisă mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Care este semnificația fracției $\frac{du}{dx}$? După cum se vede, această fracție nu reprezintă altceva decât derivata funcțiunii u, în raport cu variabila x: s'o însemnăm cu u'. Obținem astfel formula importantă:

$$y' = nu'u^{n-1}. \qquad (6)$$

Să facem o aplicație a acestei formule. Luăm funcțiunea:

$$y = (a + x)^2$$

și punem:

$$u = a + x$$

Derivata lui u este:

$$u' = 1.$$

Să scriem derivata funcțiunei y, întrebuințând formula (6); în cazul de față $n = 2$. Avem:

$$y' = nu'u^{n-1} = 2 \times 1 \times (a + x)^{2-1}$$

sau

$$y' = 2\ (a + x).$$

Alt exemplu:

$$y = \sqrt{x^2 - 3}.$$

Scriem radicalul sub forma de exponent fracționar:

$$y = (x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}.$$

Punem:

$$u = x^2 - 3, \text{ deci } y = u^{\frac{1}{2}}.$$

Derivata lui u este:

$$u' = 2x.$$

Derivata funcțiunei y este:

$$y' = nu'u^{n-1} = \frac{1}{2} \times 2x \times (x^2 - 3)^{\frac{1}{2}-1}$$

sau

$$y' = x(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{(x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}}$$

sau

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}.$$

PROBLEME

Să se calculeze derivatele următoarelor funcțiuni:

1. $y = (ax - b)\ (ax + c)$.
2. $y = 2x^3\ (x^4 - 6)$.
3. $y = (x^3 + 5)^4$.
4. $y = \sqrt[5]{ax + b}$.
5. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

CAPITOLUL X

DERIVATA CÂTULUI A DOUĂ FUNCȚIUNI

Există o regulă generală și pentru derivata câtului a două funcțiuni, scutindu-ne de procedeul complicat al

celor patru operațiuni. Pentru stabilirea ei, să considerăm două funcțiuni simple:

$$u = 3x^2 \quad \text{și} \quad \varphi = x \tag{1}$$

și să însemnăn cu y raportul lor:

$$y = \frac{u}{\varphi}. \tag{2}$$

Mărimile u și φ sunt funcțiuni de x; y este funcțiune de u și φ, deci y este funcțiune de x.

In cazul de față, câtul celor două funcțiuni se obține imediat:

$$y = \frac{3x^2}{x} = 3x,$$

cele două funcțiuni s'au contopit într'una singură, a cărei derivată este ușor de calculat. Numai că, nu totdeauna calcularea câtului se face cu atâta ușurință. De aceea este de trebuință să stabilim o regulă generală pentru calcularea derivatei unui cât, când funcțiunile u și φ își păstrează complet individualitatea lor.

Procedăm ca în trecut: dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce face ca funcțiunea u să crească cu du iar funcțiunea φ cu $d\varphi$. Faptul e ușor de înțeles: când dăm lui x creșterea dx, atunci expresiunea lui u din (1) devine $3(x+dx)^2$. Se vede că u a crescut; simbolul du reprezintă tocmai creșterea infinit mică ce o primește u, când x crește cu dx. In același fel ne explicăm și creșterea $d\varphi$ a funcțiunii φ.

Când funcțiunile u și φ primesc creșteri, se înțelege că și funcțiunea y va înregistra o creștere; însemnăm cu dy această creștere. Ținând seamă de aceste creșteri, formula (2) devine:

$$y + dy = \frac{u + du}{\varphi + d\varphi}. \tag{3}$$

Scădem relația (2) din (3):

$$y + dy - y = \frac{u + du}{\varphi + d\varphi} - \frac{u}{\varphi}.$$

Reducem termenul asemenea din membrul I iar în membrul II aducem fracțiile la același numitor (înmulțim numărătorul și numitorul fiecărei fracțiuni cu numitorul celeilalte fracțiuni) și facem scăderile:

$$dy = \frac{(u + du)\varphi - (\varphi + d\varphi)u}{\varphi(\varphi + d\varphi)}.$$

Desfacem parantezele la numărător:

$$dy = \frac{u\varphi + \varphi\, du - u\varphi - u\, d\varphi}{\varphi(\varphi + d\varphi)}$$

și reducem termenul asemenea $u\varphi$; ne rămâne:

$$dy = \frac{\varphi\, du - u\, d\varphi}{\varphi(\varphi + d\varphi)}.$$

Observăm că la numitor $d\varphi$ este un infinit mic față de φ; îl putem deci lepăda:

$$dy = \frac{\varphi\, du - u\, d\varphi}{\varphi^2}$$

In sfârșit, împărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2}. \tag{4}$$

Observăm că $\dfrac{dy}{dx}$ este raportul dintre diferențiala funcțiunii y și diferențiala variabilei x: el reprezintă deci

derivata y'. In mod analog, $\frac{du}{dx}$ este raportul dintre diferențiala funcțiunii u și diferențiala variabilei x: el exprimă derivata u'. Tot astfel raportul $\frac{d\varphi}{dx}$ reprezintă derivata φ' a funcțiunii φ. Inlocuind în formula (4) rapoartele prin litere accentuate, avem:

$$y' = \frac{\varphi u' - u\varphi'}{\varphi^2} . \qquad (5)$$

Iată formula cu care putem calcula derivata y' a unui cât. Să încercăm exprimarea ei în cuvinte:

Pentru a calcula derivata unui cât de două funcțiuni, luăm numitorul și-l înmulțim cu derivata numărătorului; apoi luăm numărătorul și-l înmulțim cu derivata numitorului. Scădem produsul al doilea din primul produs iar expresiunea obținută o împărțim cu patratul numitorului.

Cred că te-ai convins, iubite cititor, că exprimarea formulei (5) în cuvinte, este lungă și greoaie. Reținerea ei pe de rost nu este de recomandat, câtuși de puțin. De aceea, toți cei cari lucrează cu această formulă, o țin minte în litere, nu în cuvinte. Ei pot spune cu ochii închiși: *igrec prim este egal cu: ve u prim, minus u ve prim, supra ve patrat!*

Să facem o aplicație. Ca să ne încredințăm «băbește» că formula (5) reprezintă, în adevăr, derivata unui cât vom lua două funcțiuni, al căror cât se calculează cu ușurință. Anume:

$$u = 3x^2 \qquad \text{și} \qquad \varphi = x.$$

Insemnăm cu y câtul lor:

$$y = \frac{u}{\varphi} = \frac{3x^2}{x} = 3x.$$

Derivata câtului este:

$$y' = 3.$$

Să calculăm derivata y' și prin formula (5). Pentru aceasta, calculăm mai întâi derivatele funcțiunilor u și φ:

$$u' = 2 \times 3x = 6x$$

$$\varphi' = 1.$$

Apoi alcătuim produsele $\varphi u'$ și $u\varphi'$:

$$\varphi u' = x \times 6x = 6x^2$$

$$u\varphi' = 3x^2 \times 1 = 3x^2.$$

Introducem aceste rezultate în formula (5):

$$y' = \frac{\varphi u' - u\varphi'}{\varphi^2} = \frac{6x^2 - 3x^2}{x^2} = 3$$

adică am regăsit valoarea ce o așteptam.

Alt exemplu:

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x - 3} .$$

Punem:

$$u = x^2 + 1 \qquad \text{și} \qquad \varphi = 2x - 3$$

așa încât funcțiunea dată se poate pune sub forma unui cât de două funcțiuni:

$$y = \frac{u}{\varphi} .$$

Calculăm derivatele u' și φ':

$$u' = 2x \qquad \text{și} \qquad \varphi' = 2.$$

Luăm formula (5) și introducem în ea valorile de mai sus:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(2x-3)2x - (x^2+1)2}{(2x-3)^2}$$

Desfacem parantezele dela numărător:

$$y' = \frac{4x^2 - 6x - 2x^2 - 2}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 2}{(2x-3)^2}$$

sau, dând la numărător factor comun pe 2:

$$y' = \frac{2(x^2 - 3x - 1)}{(2x-3)^2}.$$

PROBLEME

Să se calculeze derivatele următoarelor funcțiuni:

1. $y = \dfrac{ax - b}{ax + b}$.

2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

3. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$.

CAPITOLUL XI

VĂ MAI AMINTIȚI CEVA DE BINOMUL LUI NEWTON?

Iubite cititor, tare mi-e teamă că ai uitat ce este cu « *binomul lui Newton* »! Se înțelege că, în acest caz, numele marelui matematician și fizician englez din veacul al

XVII-lea, alăturat termenului « *binom* » dă ceva care sperie și descurajază. Infricoșat de simbolurile și operațiunile matematice, simți, onorată cititoare, că aici ți se sfârșesc « *puterile matematice* »!

Curaj! Chestiunea este așa de simplă, că o putem lămuri destul de bine într'un singur capitol.

Mai întâi, ce este un binom? Este o expresiune formată din doi termeni legați între ei prin semnul + sau —. De pildă:

$$ax + 3by \qquad \text{sau} \qquad 2x^3 - 5x$$

reprezintă fiecare câte un binom.

Binomul lui Newton este, din acest punct de vedere, și mai simplu: el cuprinde numai două litere, legate între ele cu + sau —. Dar binomul este ridicat la o putere m:

$$(a + b)^m \qquad \text{sau} \qquad (a - b)^m.$$

Cu alte cuvinte, fiecare din aceste două expresiuni reprezintă câte un produs de m factori:

$(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$ ș. a. m. d. de m ori

$(a - b)(a - b)(a - b)(a - b)$ ș. a. m. d. de m ori.

Dacă înmulțim între ei acești binomi, rezultatul este un *polinom*, adică un șir de mai mulți termeni legați între ei prin semnele + sau —. Problema ce ni se pune este de a scrie acest polinom dintr'odată, fără să mai facem treptat-treptat înmulțirile binoamelor. De pildă, când ni se dă binomul $(a+b)^8$, să nu ne pierdem timpul cu înmulțirile succesive, ci să înșirăm dintr'odată toți termenii rezultatului.

Șirul de termeni ce se capătă prin ridicarea binomului $(a+b)$ sau $(a-b)$ la o putere oarecare, se numește « *desvoltarea binomului* », sau « *formula binomului* » sau « *binomul lui Newton* ».

Pentru a scoate regula după care se înșiră toți termenii din desvoltarea binomului, să cercetăm câteva exemple simple, cunoscute bine prin întrebuințarea lor curentă:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Observăm că a, primul termen al binomului, se regăsește în toți termenii desvoltării, având un exponent ce scade mereu cu o unitate. El începe cu exponentul binomului și scade treptat, atingând în ultimul termen exponentul zero (cum $a^0=1$, el nu mai figurează explicit în ultimul termen). De pildă, pentru $(a+b)^4$, primul termen a se orânduiește astfel în desvoltarea binomului:

$$a^4 \quad a^3 \quad a^2 \quad a^1 \quad a^0.$$

Al doilea termen al binomului, termenul b, prezintă în desvoltare o succesiune exact inversă: el începe cu cel mai mic exponent — exponentul zero — și termină cu exponentul binomului. Pentru $(a+b)^4$, termenul b se succede astfel:

$$b^0 \quad b^1 \quad b^2 \quad b^3 \quad b^4.$$

Vedem apoi că fiecare termen din desvoltarea binomului cuprinde produsul ambilor factori a și b; în exemplul considerat, $(a+b)^4$, desvoltarea binomului se succede astfel:

$$a^4b^0 \quad a^3b^1 \quad a^2b^2 \quad a^1b^3 \quad a^0b^4.$$

Numai că, termenii b^0 și a^0, fiind egali fiecare cu unitatea, nu mai figurează în formula definitivă. Dacă ne uităm cu atenție la exponenții succesiunii de mai sus, găsim că în fiecare termen al desvoltării există doi exponenți: suma lor dă tocmai exponentul binomului. In exemplul nostru, binomul fiind ridicat la puterea a 4-a,

suma exponenților din fiecare termen al desvoltării este egală cu 4. Bunăoară, în termenul penultim a^1b^3, exponenții 1 și 3, adunați la un loc, dau 4; în termenul final, a^0b^4, exponenții 0 și 4 dau prin însumare tot cifra 4.

Să ne oprim deocamdată la aceste constatări, pentru ca să le generalizăm. Ceea ce am constatat pentru binomul $(a+b)^4$ se aplică și binomului $(a+b)^m$. După cum desvoltarea binomului $(a+b)^4$ începe cu termenul a^4b^0, tot astfel și desvoltarea binomului $(a+b)^m$ începe cu a^mb^0. In termenii următori exponentul lui a scade de fiecare dată cu o unitate, în vreme ce, dimpotrivă, exponentul lui b crește de fiecare dată cu o unitate. Deci, al doilea termen al desvoltării binomului $(a+b)^m$ va cuprinde produsul $a^{m-1}b^1$, al treilea va cuprinde pe $a^{m-1-1}b^2$, adică $a^{m-2}b^2$, ș. a. m. d. Astfel, succesiunea produselor ab se face în modul următor:

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3,\ \ldots\ldots ab^{m-1},\ b^m$$

și se vede ușor că suma exponenților din fiecare termen este egală cu m, exponentul binomului.

Fiecare termen din acest șir se definește prin « *rangul* » lui, care este numărul lui de ordine în desvoltarea binomului. Primul termen a^m are rangul 1, termenul al doilea $a^{m-1}b$ are rangul 2, termenul al treilea $a^{m-2}b^2$ are rangul 3, ș. a. m. d. Se vede că *rangul unui termen îl aflăm imediat din exponentul lui b, plus o unitate*. De pildă, să aflăm rangul termenului $a^{m-3}b^3$. Observăm că în acest termen exponentul lui b este 3; adăogându-i o unitate face $3+1=4$. Vom spune deci că termenul $a^{m-3}b^3$ are în desvoltarea binomului rangul 4.

Ultimul termen din desvoltarea binomului general este b^m, deci rangul lui este $m+1$; aceasta ne dovedește că desvoltarea binomului general cuprinde $m+1$ termeni.

Ne-a mai rămas să stabilim și legea după care se succed coeficienții numerici în desvoltarea binomului. Coeficientul numeric al unui termen se găsește cu ajutorul

termenului precedent; anume, *se înmulțește coeficientul acestui termen cu exponentul lui a și se împarte cu rangul lui.* Bunăoară, să determinăm coeficientul numeric al termenului de rangul 2 din desvoltarea binomului $(a+b)^4$. Luăm termenul imediat precedent, care este a^4: el are rangul 1 iar exponentul lui a este aici 4. Facem calculul:

$$\frac{\text{exponentul lui } a \times \text{coeficientul termenului}}{\text{rangul termenului}} = \frac{4 \times 1}{1} = 4$$

care este, în adevăr, coeficientul termenului $4a^3b$.

Cu ajutorul regulei indicate, să calculăm coeficienții numerici din desvoltarea binomului general. Am văzut că termenii acestei desvoltări sunt:

$$(a+b)^m = a^m + ?\ a^{m-1}b + ?\ a^{m-2}b^2 +$$
$$?\ a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\ldots + b^m.$$

Am înlocuit aici coeficientul numeric al fiecărei termen printr'un semn de întrebare.

Cel dintâi coeficient numeric de calculat este al termenului de rangul 2; termenul imediat precedent este a^m, de rangul 1. Vom înmulți, deci, exponentul m cu coeficientul 1 al acestui termen și vom împărți prin rangul 1:

$$\frac{m \times 1}{1} = m.$$

Am aflat astfel coeficientul termenului de rangul 2, ceea ce ne îngăduie să scriem complet acest termen:

$$ma^{m-1}b.$$

Trecem la termenul de rangul 3. Pentru a-i calcula coeficientul numeric, ne referim la termenul de rangul 2,

pe care l-am scris mai sus, în forma lui completă. Luăm exponentul $m-1$, îl înmulțim cu coeficientul m și împărțim cu rangul 2 al termenului:

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Am aflat astfel coeficientul termenului de rangul 3. Acest termen se scrie, prin urmare:

$$\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2.$$

Trecem la termenul de rangul 4. Ca să-i aflăm coeficientul numeric, luăm în considerare termenul precedent, ca de obicei. Luăm exponentul $m-2$, îl înmulțim cu coeficientul $\frac{m(m-1)}{2}$ și împărțim cu 3, care este rangul termenului ce ne ajută la calcul:

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)}{2 \times 3}.$$

Această expresiune constitue coeficientul termenului de rangul 4. Scris în mod complet, termenul se prezintă astfel:

$$\frac{m(m-1)\ (m-2)}{2 \times 3}a^{m-3}b$$

și tot așa mai departe. Pentru a vedea și mai bine rezultatul muncii de până acum, vom scrie încă odată desvol-

tarea binomului general, înlocuind semnul întrebării prin coeficientul respectiv:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}a^{m-3}b^3 + \dots$$

Matematicienii țin foarte mult la ordonarea simetrică și rațională a termenilor dintr'o formulă. Ei adaugă uneori formulelor termeni inutili din punct de vedere al calculului, termeni cari nu modifică câtuși de puțin valoarea formulelor, dar cari au în schimb rostul că scot în relief anumite structuri, un anumit fel de înșiruire al factorilor.

Așa se întâmplă și cu formula binomului. Aproape toți coeficienții din desvoltarea binomului sunt fracțiuni, au deci câte un numitor. De ce să nu aibe toți? Și iată că matematicianul pune și coeficientul termenului de rangul 2 sub forma de fracție, dându-i numitorul 1! Apoi, fiecare coeficient are la numitor un produs de cifre, ce se succed ca în șirul natural al numerelor. Astfel, la termenul de rangul 4, numitorul coeficientului este 2×3; la termenul de rangul 5, este $2\times 3\times 4$, ș. a. m. d. Pentru a pune în evidență acest fapt, că e vorba la numitor de șirul natural al numerelor, matematicienii adaugă fiecărui produs și factorul 1. Bunăoară, pentru termenul de gradul 4 ei scriu numitorul coeficientului în modul următor: $1\times 2\times 3$. Și pentrucă suntem în domeniul algebrei, unde punctul înlocuește semnul $\times$, vom scrie cifrele dela numitori despărțite între ele prin puncte.

Cu aceste convenționiuni, formula binomului se scrie:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b^1 + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \dots \qquad (1)$$

Dacă binomul cuprinde nu suma, ci diferența a doi termeni, cum este de pildă:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

atunci semnul + alternează cu semnul —. Tot astfel vom avea și în cazul general:

$$(a-b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \dots$$

Iată tot ce trebue să ne reamintim despre formula binomului. După câteva exerciții simple, reușim să alcătuim cu repeziciune desvoltarea oricărui alt binom, ai cărui termeni nu sunt a și b, ci alte simboluri.

Un exercițiu: Să desvoltăm binomul

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \qquad (2)$$

Se vede bine că această expresiune nu este decât binomul $(a+b)^m$, studiat precedent, în care:

$$a=1 \quad \text{și} \quad b=\frac{1}{m}$$

Pentru a obține desvoltarea binomului dat, vom lua formula generală stabilită mai sus și vom înlocui în toți termenii pe a prin 1 și pe b prin $\frac{1}{m}$:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}1^{m-1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}1^{m-2}\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}1^{m-3}\left(\frac{1}{m}\right)^3 + \dots$$

Observăm că toți factorii 1^m, 1^{m-1}, 1^{m-2}, etc., sunt fiecare egali cu unitatea, așa că nu mai este nevoie să-i scriem în produsele respective. Apoi, în fiecare termen putem face o simplificare: m dela numărător se reduce cu un m dela numitor. Ne rămâne așa dar:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{m-1}{1.2}\cdot\frac{1}{m} + \frac{(m-1)\ (m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m^2}+\ldots \qquad (3)$$

Am obținut desvoltarea căutată.

Formula (3) se simplifică și mai mult, dacă factorul m este foarte mare sau, cum spun matematicienii, dacă m tinde către infinit (tinde să devină infinit de mare). In adevăr, să considerăm termenul de rangûl 3:

$$\frac{m-1}{1.2}\cdot\frac{1}{m}$$

Când m este extrem de mare, numărătorul $m-1$ tinde să devină egal cu m; căci dintr'o cantitate extrem de mare, dacă iei sau nu iei o unitate, tot una este. Urmează atunci că, pentru m extrem de mare, numărătorul $m-1$ se reduce cu numitorul m, ceea ce face ca termenul de rangul 3 să devină:

$$\frac{1}{1.2}$$

De asemenea, în termenul de rangul 4, când m este extrem de mare, factorii $m-1$ și $m-2$ tind să devină fiecare egal cu m; în acest caz, produsul lor tinde să devină m^2, așa că se simplifică cu m^2 dela numitor. Ne rămâne pentru acest termen numai:

$$\frac{1}{1.2.3}$$

Și tot așa se petrece și cu ceilalți termeni. Desvoltarea (3) a binomului se scrie atunci:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots \qquad (4)$$

când m este extrem de mare.

Iată la ce șir de termeni simpli se reduce desvoltarea binomului $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, când m este extrem de mare (m tinde să devină infinit de mare). O asemenea înșiruire a unui număr extrem de mare de termeni, ce se deduc unii din alții, după o regulă anumită, se numește « *serie* ». Seria de mai sus, având unele proprietăți cu totul remarcabile, a primit un nume special, redus la o singură vocală: este seria *e*. Putem scrie deci:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

când m este extrem de mare.

Prin e se înțelege, așa dar, suma tuturor termenilor din expresiunea (4):

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots \qquad (5)$$

Numărul acestor termeni este nesfârșit de mare; dar suma lor nu este infinit de mare, căci dela termenul de rangul 3 în sus, valoarea fiecărui termen devine din ce în ce mai mică. Suma primilor doi termeni este:

$$1+\frac{1}{1}=2$$

ceilalți termeni cari urmează sunt fracțiuni zecimale, ce se adaugă numărului 2. Valoarea numerică a lui e este,

prin urmare, cuprinsă între 2 şi 3, având un număr nesfârşit de zecimale. Dacă facem calculul lui e, cu nouă zecimale, obţinem:

$$e = 2{,}718281828$$

valoare [1]) uşor de ţinut minte, căci după 2,7 urmează 1828 de două ori. Să ne aducem aminte de însemnătatea istorică a anului 1828. A izbucnit atunci războiul între Ruşi şi Turci, încheiat un an mai târziu prin tratatul dela Adrianopol, care a dat Ţărilor române libertatea comerţului. După *Gherea* şi *Zeletin*, pacea dela Adrianopol marchează începuturile burgheziei româneşti.

Alt exerciţiu: să desvoltăm binomul:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

care se înrudeşte de aproape cu cel precedent şi este tot

---

[1]) Putem dovedi şi direct, că expresiunea $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ tinde să capete această valoare aritmetică, atunci când m devine din ce în ce mai mare:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25 \qquad \left(1+\frac{1}{20}\right)^{20} = 2{,}653$$

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}489 \qquad \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}704$$

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}594 \qquad \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2{,}7171$$

$$\left(1+\frac{1}{10.000}\right)^{10.000} = 2{,}7182$$

şi aşa mai departe.

de forma $(a+b)^m$, unde $a=1$ şi $b=\frac{x}{m}$. Vom lua formula generală (1) şi vom înlocui pe a şi b prin valorile indicate:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1^m + \frac{m}{1}1^{m-1}\cdot\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}1^{m-2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}1^{m-3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \ldots$$

Facem şi aici simplificările arătate mai sus: anume, înlocuim factorii 1^{m-1}, 1^{m-2}, $1^{m-3}\ldots$, prin 1 şi reducem în fiecare termen un m dela numărător cu un m dela numitor. Ne rămâne:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{m-1}{1.2}\cdot\frac{x^2}{m} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^3}{m^2} + \ldots\ldots$$

Cum era de aşteptat, desvoltarea acestui binom este identică cu a precedentului, numai că aici apare şi factorul x. Când $x=1$, obţinem formula (3).

Să considerăm acum cazul când m este extrem de mare (m tinde către infinit). Are loc aceeaşi simplificare, ca şi pentru formula (3): factorii: $m-1$, $m-2$, $m-3\ldots$, tind să aibă fiecare o valoare cât mai apropiată de m, aşa că ei se reduc în fiecare termen cu numitorul m. Desvoltarea binomului nostru se reduce atunci la:

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots \qquad (6)$$

când m este extrem de mare.

Cine nu vede că această serie este bine înrudită cu seria e? Să exprimăm matematic această înrudire. Pentru aceasta, vom însemna cu n câtul dintre m și x, adică:

$$\frac{m}{x} = n$$

de unde scoatem:

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{n} \quad \text{și} \quad m = nx$$

Să înlocuim în binomul dat pe $\frac{x}{m}$ prin $\frac{1}{n}$ și pe m prin nx:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

Observăm că exponentul binomului reprezintă un produs de doi factori. Noi știm din algebră că, pentru a ridica la puterea x o mărime aflată la puterea n, scriem mărimea dată și-i dăm ca exponent produsul nx al exponenților. Și invers: când exponentul unei mărimi este un produs de doi factori, aceasta însemnează că este vorba de două ridicări succesive, la câte o putere egală cu fiecare exponent. Așa dar:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x \qquad (7)$$

Când m este extrem de mare, n este de asemenea extrem de mare; atunci binomul:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

tinde să ia valoarea seriei e. Deci relația (7) tinde să devină:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = [e]^x = e^x \qquad (8)$$

când m este extrem de mare.

Dacă comparăm formula (6) cu (8), vedem că membrul I este identic; în consecință, membrul II are aceeași valoare în ambele formule; adică putem scrie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Când luăm $x=1$, regăsim seria simplă e.

PROBLEME

Să se desvolte binoamele:

1. $(a + b)^8$.
2. $\left(a + \frac{x}{c}\right)^6$.
3. $(2 + 3)^4$.

CAPITOLUL XII

DESPRE LOGARITMI ȘI DERIVATA FUNCȚIUNII LOGARITMICE

Oricât de neplăcute ți-ar fi fost matematicile în liceu, este cu neputință să nu fi fost impresionat de miracolul logaritmilor. Cele mai grozave operațiuni aritmetice: înmulțiri cu numere mari, împărțiri istovitoare, scoateri de rădăcini cubice (ce te aduc la disperare), toate acestea se fac, cum s'ar zice, dintr'un condei! Te uiți de câteva ori prin tabla de logaritmi, însemni câteva cifre pe hârtie,

faci o mică operație de calcul și... gata! Operațiuni la care ar fi trebuit să te muncești ore în șir se mântuie în câteva minute.

Tare sgârcit trebue să fi fost inventatorul logaritmilor, că prea economisești din timpul de calcul! Fără îndoială, că bănuiți acum naționalitatea inventatorului. Era scoțian: *Neper*, baron de Merchiston, născut și mort la Merchiston, lângă Edinburg (1550—1617).

De unde vin aceste virtuți miraculoase ale logaritmilor? Cum de reușesc ei să pună în valoare principiul biologic: *cu minimum de muncă, maximum de efect util?* Răspunsul este foarte simplu: toate binefacerile logaritmilor se datoresc rolului lor de exponenți. Căci numai pentru mărimile exponențiale înmulțirile se reduc la adunarea exponenților, împărțirile se reduc la scăderea exponenților, etc.

Logaritmul este, așa dar, un *exponent:* și anume, este puterea la care trebue ridicat un număr anumit — zis *bază* — pentru a reproduce numărul dat. Să interpretăm această definiție.

Luăm un număr oarecare a ca *bază* de logaritmi. Cu acest număr putem să reproducem toate celelalte numere cunoscute, dacă îi alăturăm un exponent convenabil. De pildă, vrem să reproducem numărul 7. Există un exponent x, așa încât:

$$a^x = 7.$$

Spunem că x este logaritmul lui 7, pentru *baza* dată.

Mai concret: considerăm, ca bază de logaritmi numărul 3. Care este logaritmul lui 9, pentru această bază? Este puterea la care trebue să ridicăm baza 3, pentru a căpăta pe 9. Cum:

$$3^2 = 9,$$

urmează că logaritmul lui 9 este 2, când luăm ca bază numărul 3.

Să generalizăm aceste considerațiuni. Fie a baza sistemului de logaritmi; logaritmul unui număr oarecare n este exponentul x, care satisface egalitatea:

$$n = a^x.$$

Baza a, fiind și ea un număr, ce logaritm îi corespunde? Logaritmul ei este egal cu exponentul x, care satisface relația:

$$a = a\ .$$

Se vede imediat, din această relație că $x=1$. Adică, *în orice sistem de logaritmi, logaritmul bazei este egal cu unitatea.*

Se întrebuințează astăzi două sisteme de logaritmi, fiecare sistem având anumite foloase, de care este lipsit celălalt. Primul sistem, numit sistemul *natural* sau *neperian*, ia ca bază numărul e, despre care am vorbit în capitolul precedent. Deci, pentru acest sistem:

$$\log e = 1.$$

Acest sistem prezintă mari foloase în considerațiunile teoretice, unde numărul e apare deseori prin logaritmul său. Toate formulele care cuprind termenul log e se simplifică atunci, deoarece acest termen este egal cu unitatea.

Cel de al doilea sistem de logaritmi, sistemul *zecimal* sau *vulgar*, ia ca bază numărul 10, adică se consideră:

$$\log 10 = 1.$$

Acest sistem prezintă mari foloase practice, din care cauză este întrebuințat la alcătuirea *tabelelor de logaritmi*, cu care se lucrează în mod curent.

De obicei, considerațiunile teoretice se fac în sistemul neperian; când se trece însă la aplicațiuni practice, la verificări numerice, este nevoie să transformăm logaritmii neperieni în logaritmi zecimali, pentru a putea utiliza

tabelele de logaritmi. Transformarea se face potrivit relației:

logaritmul neperian = 2,303 × logaritmul zecimal,

2,303 fiind « *factorul de conversiune* » al logaritmilor neperieni în logaritmi zecimali.

Acestea sunt toate lămuririle ce le aveam de făcut asupra logaritmilor, pentru ca să putem trece la derivata funcțiunii logaritmice simple. Expresiunea:

$$y = \log x \tag{1}$$

constitue o *funcțiune logaritmică* simplă. Ea arată că y este logaritmul numărului x, oricare ar fi baza sistemului de logaritmi considerat. Pentru ca să calculăm derivata acestei funcțiuni, vom proceda ca de obicei, urmând cele patru operațiuni cunoscute.

Dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce face ca y să crească cu dy. Ținând seamă de aceste creșteri, formula (1) se scrie:

$$y + dy = \log (x + dx). \tag{2}$$

Scădem formula (1) din formula (2):

$$y + dy - y = \log (x + dx) - \log x.$$

In membrul I reducem termenul y, iar în membrul II observăm că avem diferența a doi logaritmi. Se știe din algebră că, diferența a doi logaritmi este egală cu logaritmul câtului dintre descăzut și scăzător. Aici descăzutul este $x+dx$ iar scăzătorul este x; deci:

$$dy = \log \frac{x + dx}{x} = \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right) \tag{3}$$

Impărțim ambii membrii cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log \left(1 + \frac{dx}{x}\right)}{dx} = \frac{1}{dx} \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right) \tag{4}$$

Faptul că în membrul II avem un infinit mic, dx, ne îngăduie să dăm acestei expresiuni o formă mai simplă. In adevăr, știm că logaritmul unei puteri este egal cu puterea înmulțită cu logaritmul numărului. Și invers, înmulțind logaritmul unui număr cu o cantitate dată, produsul obținut este egal cu logaritmul numărului, ridicat la o putere egală cu cantitatea dată. In expresiunea (4) factorul $\frac{1}{dx}$ înmulțește $\log \left(1 + \frac{dx}{x}\right)$, deci acest produs reprezintă o putere:

$$\frac{1}{dx} \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}} \tag{5}$$

Punem:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{m} \tag{6}$$

Cum dx este infinit mic, fracția $\frac{dx}{x}$ este de asemenea un infinit mic; deci și raportul $\frac{1}{m}$ trebue să fie infinit mic. Dar, pentru ca acest raport să fie infinit mic, e necesar ca m să fie infinit mare. Să reținem această condiție a lui m.

Din formula (6) scoatem:

$$\frac{1}{dx} = \frac{m}{x} \tag{7}$$

Să introducem în formula (4) relațiile (6) și (7). Avem:

$$\frac{dy}{dx} = \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{\frac{1}{dx}} = \log \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{x}}$$

Putem considera exponentul $\frac{m}{x}$ ca un produs:

$$\frac{m}{x} = m \times \frac{1}{x}.$$

atunci:

$$\frac{dy}{dx} = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m \times \frac{1}{x}} = \log\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

Să trecem cel de al doilea exponent înaintea logaritmului, pe baza proprietății cunoscute, că logaritmul unei puteri este egal cu puterea înmulțită cu logaritmul numărului:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Am văzut însă că, pentru m extrem de mare (m tinde către infinit), avem:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e$$

și, în consecință:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e.$$

Iată la ce expresiune simplă am reușit să aducem formula (4). Pentru logaritmii neperieni, $\log e = 1$, deci formula precedentă se reduce la:

$$y' = \frac{1}{x}, \tag{8}$$

rezultat remarcabil, care ne spune că: *derivata funcțiunii*

logaritmice este egală, în sistemul neperian, cu inversul variabilei.

Să presupunem acum că, în locul variabilei x din formula (1) avem o funcțiune de x, de pildă:

$$y = \log (2x^2 + 1).$$

Punem:

$$u = 2x^2 + 1 \tag{9}$$

atunci funcțiunea dată capătă forma simplă:

$$y = \log u$$

a cărei derivată știm s'o calculăm. Aici variabila este u; potrivit regulei stabilite mai sus, derivata lui y, în raport cu această variabilă, este, în sistemul neperian:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} \tag{10}$$

Noi căutăm însă derivata lui y în raport cu variabila x, adică raportul $\frac{dy}{dx}$. Pentru a trece dela derivata $\frac{dy}{du}$ la derivata $\frac{dy}{dx}$, vom face un mic artificiu de calcul. Anume, derivata în raport cu x se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

căci în membrul II, se reduce du dela numărător cu du dela numitor, rămânând aceeași fracțiune ca și în membrul I. Să introducem în această formulă valoarea lui $\frac{dy}{du}$ dată de (10); avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} \tag{11}$$

Cine este $\frac{du}{dx}$? Este derivata funcțiunii u, în raport cu x. Expresiunea funcțiunii u este dată de (9); derivata ei se calculează ușor:

$$\frac{du}{dx} = 2 \times 2x = 4x.$$

Introducem valoarea acestei derivate în formula (11):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \times 4x$$

și înlocuind pe u cu expresiunea lui, dată de (9), obținem:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{4x}{2x^2 + 1},$$

care este derivata căutată.

PROBLEME

Să se calculeze derivatele funcțiunilor:

1. $y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$

2. $y = \log \frac{x-1}{x+1}$.

3. $y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

CAPITOLUL XIII

DERIVATA FUNCȚIUNII EXPONENȚIALE

Funcțiune și *exponent* sunt două cuvinte ce nu trezesc niciun echivoc. Le-am întâlnit de prea multe ori în expunerea noastră, ca să mai avem teamă de ele.

Dar împerecherea lor, sonoră și masivă, scoasă parcă dintr'o cantonetă italiană, ne pune la îndemână ceva nou. Fiind vorba de «funcțiune», trebue să ne așteptăm, firește, la o relație între y și x. Calificativul «exponențială» precizează variabilei independente o situație specială: litera x se urcă la exponent.

Așa ceva nu am mai întâlnit până acum. Ne-am ocupat în capitolele precedente de funcțiuni înzestrate cu exponenți, cum este, de pildă, $y = x^n$, însă exponentul se reducea la o simplă constantă. De data aceasta, în funcțiunea exponențială exponentul cuprinde însăși variabila independentă x.

Așa dar, prin «*funcțiune exponențială*» se înțelege o expresiune în care variabila independentă figurează ca exponent. Cea mai simplă funcțiune exponențială este:

$$y = a^x \tag{1}$$

unde a este o constantă. Să calculăm derivata acestei funcțiuni, urmărind pas cu pas cele patru operațiuni cunoscute.

Dăm lui x o creștere infinit mică dx, ceea ce are ca rezultat o creștere infinit mică dy, pentru funcțiune:

$$y + dy = a^{x + dx}. \tag{2}$$

Scădem formula (1) din (2):

$$y + dy - y = a^{x + dx} - a^x.$$

Reducem în membrul I termenul comun, iar în membrul II dăm pe a^x factor comun (știind că $a^{x + dx} = a^x \times a^{dx}$):

$$dy = a^x \,(a^{dx} - 1).$$

Împărțim ambii membri cu dx:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{a^{dx} - 1}{dx}. \tag{3}$$

Iată expresiunea care ne conduce direct la derivată. Cum dx este o cantitate infinit mică, putem transforma această formulă în alta mai simplă. In adevăr, să punem:

$$a^{dx} - 1 = \frac{1}{m} \cdot \tag{4}$$

Exponentul dx fiind infinit mic, aproape de zero, înseamnă că a^{dx} este aproape egal cu unitatea (știm că orice mărime luată la puterea zero reprezintă unitatea). Și deci diferența $a^{dx} - 1$ este foarte apropiată de zero. Se înțelege atunci că raportul $\frac{1}{m}$ trebue să fie și el foarte aproape de zero, deci numitorul m trebue să aibă o valoare extrem de mare. Să reținem această condiție specială a lui m, de a fi o cantitate extrem de mare, sau, cum spun matematicienii, de a fi o cantitate ce tinde către infinit.

Din formula (4) scoatem:

$$a^{dx} = 1 + \frac{1}{m} \cdot \tag{5}$$

Fără îndoială că cititorul, observând membrul II, începe să bănuiască unde vom ajunge: vom regăsi la sfârșit, celebrul număr e.

Să scoatem din formula (5) valoarea lui dx; pentru aceasta, să considerăm logaritmii ambilor membri:

$$\log a^{dx} = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot$$

Observăm că în membrul I avem logaritmul unei puteri; după cum se știe, logaritmul unei puteri este egal cu puterea înmulțită cu logaritmul numărului. Deci formula precedentă se mai poate scrie:

$$dx \,.\, \log a = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$$

de unde:

$$dx = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log a} \tag{6}$$

Să ne reîntoarcem acum la formula (3). Inlocuim în această formulă pe $a^{dx} - 1$ prin raportul $\frac{1}{m}$, așa cum ne spune formula (4), iar pe dx îl înlocuim cu valoarea lui dată de (6). Obținem:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{\frac{1}{m}}{\frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log a}},$$

care se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}$$

La numitor avem produsul dintre m și logaritmul unei cantități; după cele știute, acest produs reprezintă logaritmul unei puteri, așa că formula precedentă se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} \cdot \tag{7}$$

Am văzut mai sus că m trebue să aibă o valoare extrem de mare; în acest caz, după cum am stabilit în capitolul precedent, avem:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

și, luând logaritmii:

$$\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \log e.$$

Să introducem această formulă în (7); obținem:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}. \tag{8}$$

Este expresiunea definitivă a derivatei căutate. In două cazuri particulare, această expresiune se reduce și mai mult, și anume:

a) Dacă lucrăm cu logaritmi neperieni, atunci $\log e = 1$, deci formula (8) devine:

$$y' = a^x \log a \tag{9}$$

adică: *derivata funcțiunii exponențiale simple* a^x *este egală cu funcțiunea însăși înmulțită cu logaritmul neperian al numărului* a.

b) Să considerăm funcțiunea exponențială:

$$y = e^x$$

care nu este decât un caz particular al precedentei, în care mărimea a a fost înlocuită cu numărul e (baza logaritmilor neperieni). In consecință, derivata acestei funcțiuni exponențiale se reprezintă prin formula (8), înlocuind însă pe a cu e. Deci:

$$y' = e^x,$$

adică: *derivata funcțiunii* e *este egală cu însăși funcțiunea.* Iată un rezultat demn de toată atențiunea: *derivata este identică cu funcțiunea!*

Cele două funcțiuni exponențiale, cercetate mai sus, sunt simple, simple de tot: variabila independentă x figurează ea singură la exponent. Dar în multe cazuri, exponentul are o structură ceva mai complicată, fiind reprezentat printr'o funcțiune de x. Bunăoară:

$$y = a^{x^3} \tag{10}$$

Să însemnăm cu u exponentul lui a:

$$u = x^3.$$

Funcțiunea dată se scrie atunci:

$$y = a^u,$$

deci avem o funcțiune exponențială analoagă cu (1), cu deosebirea că, în locul variabilei x avem o funcțiune de x. Avem astfel o *funcțiune de funcțiune.*

Pentru a calcula derivata în acest caz, considerăm mai întâi pe u ca variabilă independentă. Derivata funcțiunii y, în raport cu variabila u, se scrie direct, cu ajutorul formulei (9):

$$\frac{dy}{du} = a^u \log a. \tag{11}$$

Noi căutăm însă derivata lui y în raport cu variabila x, adică vrem să aflăm raportul $\frac{dy}{dx}$. Dar acest raport se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Inlocuim aici primul raport din membrul II cu valoarea lui dată de formula (11):

$$\frac{dy}{dx} = a^u \log a \times \frac{du}{dx}. \tag{12}$$

Celălalt raport din membrul II exprimă derivata lui u în raport cu x; cum $u=x^3$, avem:

$$\frac{du}{dx}=3x^2.$$

Introducem această expresiune în (12):

$$y'=3x^2a^{x^3}\log a,$$

formulă ce reprezintă derivata funcțiunii (10).

PROBLEME

Să se calculeze derivatele funcțiunilor:

1. $y=a^{-x}$.
2. $y=e^{e^x}$.
3. $y=Ae^{k_1x}+Be^{-k_2x}$.

CAPITOLUL XIV

DERIVATA FUNCȚIUNILOR CIRCULARE

E timpul să ne răscolim puțin amintirile trigonometrice. Vă mai aduceți aminte? Unui arc de cerc i se dau în seamă șase mărimi, botezate cu nume, care de care mai bizare: *sinus*, *cosinus*, *secantă*, *cosecantă*, *tangentă* și *cotangentă*. Toate aceste mărimi își datoresc existența numai arcului considerat. Când lungimea x a arcului variază, cele șase mărimi variază și ele, adică sunt *funcțiuni* de arcul corespunzător. Cum arcul e definit pe un cerc, se mai spune că aceste mărimi sunt *funcțiuni circulare*, existența lor fiind strâns legată de a cercului.

Să considerăm un arc de cerc, cu lungimea x; acestui arc îi corespunde un sinus, a cărui valoare o însemnăm

cu y. Pe scurt, spunem că *y este sinusul arcului x*; această propoziție se exprimă matematic astfel:

$$y=\sin x. \tag{1}$$

Bunăoară, pentru arcul de 28°, găsim în tabelele trigonometrice un sinus de 0,469. Cu alte cuvinte, dacă în expresiunea de mai sus dăm lui x valoarea 28°, y capătă valoarea 0,469:

$$0{,}469=\sin 28°.$$

Această egalitate ne spune că, într'un cerc cu raza de 1 metru, sinusul arcului de 28° are o lungime de 0,469 metri, adică aproximativ o jumătate de metru.

Se vede imediat că, în relația (1), y este funcțiunea iar x variabila independentă: y este un sinus iar x este un arc. Pentru a calcula derivata funcțiunii circulare y, vom proceda în modul cunoscut, luând în considerare creșterile infinit mici dx și dy.

Când arcul x crește cu dx, sinusul său, y, crește cu dy. Și după cum arcului x îi corespunde un sinus y, tot astfel și arcului $x+dx$ îi corespunde un sinus $y+dy$. Putem deci scrie:

$$y+dy=\sin(x+dx). \tag{2}$$

Scădem formula (1) din (2):

$$y+dy-y=\sin(x+dx)-\sin x.$$

Reducem termenul comun din membrul I și apoi împărțim cu dx ambii membri:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x+dx)-\sin x}{dx} \tag{3}$$

Am ajuns astfel în preajma derivatei. Să mergem mai departe, căci membrul II se poate simplifica foarte mult, știind că dx este o mărime infinit mică.

In adevăr, observăm că la numărător avem diferența a două sinusuri; din Trigonometrie se știe că diferența a două sinusuri se poate pune sub forma unui produs de doi factori, și anume:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2} . \qquad (4)$$

Să utilizăm această formulă, pentru ca să transformăm numărătorul fracțiunei (3). In acest scop, punem:

$$p = x + dx \quad , \quad q = x$$

și introducem aceste notațiuni în formula (4):

$$\sin (x + dx) - \sin x = 2 \sin \frac{x + dx - x}{2} \cdot \cos \frac{x + dx + x}{2}$$

Facem reducerile necesare:

$$\sin (x + dx) - \sin x = 2 \sin \frac{dx}{2} \cdot \cos \frac{2x + dx}{2} .$$

Observăm că:

$$\frac{2x + dx}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{dx}{2} = x + \frac{dx}{2}$$

așa că:

$$\sin (x + dx) - \sin x = 2 \sin \frac{dx}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{dx}{2} \right) .$$

Introducem această relație în (3):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{dx}{2} \cos \left(x + \frac{dx}{2} \right)}{dx}$$

și coborîm la numitor factorul 2 dela numărător:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \frac{dx}{2} \cos \left(x + \frac{dx}{2} \right)}{\frac{dx}{2}} \qquad (5)$$

Știm din Trigonometrie că sinusul unui arc foarte mic se identifică cu însuși arcul; cum dx este o mărime infinit mică, ce tinde către zero, putem scrie:

$$\sin \frac{dx}{2} = \frac{dx}{2} .$$

Atunci factorul $\sin \frac{dx}{2}$ dela numărătorul formulei (5) se reduce cu numitorul, rămânând:

$$\frac{dy}{dx} = \cos \left(x + \frac{dx}{2} \right) .$$

Lepădăm termenul infinit mic $\frac{dx}{2}$ care tinde către zero și obținem formula definitivă:

$$y' = \cos x, \qquad (6)$$

adică: *sinusul unui arc are ca derivată cosinusul aceluiași arc.* Cu alte cuvinte, *raportul dintre creșterea infinit mică a sinusului și creșterea infinit mică a arcului respectiv este egal cu cosinusul arcului.*

Se poate ca, în locul variabilei x din expresiunea funcțiunii circulare, să se găsească o funcțiune de x. De pildă:

$$y = \sin (2x + 5) \qquad (7)$$

unde $2x+5$ reprezintă arcul al cărui sinus este y. Să însemnăm cu u valoarea acestui arc:

$$u = 2x + 5$$

atunci funcțiunea (7) se scrie:

$$y = \sin u. \tag{8}$$

Aici y este funcțiune de u, iar u este funcțiune de x; y este deci *funcțiune de funcțiune*. Să calculăm derivata acestui caz.

Formula (8) ne spune că y este sinusul arcului u. Iar mai sus am stabilit că, raportul dintre creșterea infinit mică dy a sinusului și creșterea infinit mică a arcului respectiv este egal cu cosinusul arcului. Putem deci scrie, în cazul de față:

$$\frac{dy}{du} = \cos u. \tag{9}$$

Această formulă reprezintă derivata lui y în raport cu u; noi vrem să aflăm derivata lui y în raport cu x, adică vrem să aflăm valoarea raportului $\frac{dy}{dx}$. Pentru aceasta, vom proceda ca în trecut, luând formula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Introducem aici valoarea lui $\frac{dy}{du}$ din (9):

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times \frac{du}{dx}. \tag{10}$$

Raportul $\frac{du}{dx}$ exprimă derivata funcțiunii u, în raport cu variabila x. Cum ni s'a dat:

$$u = 2x+5$$

deducem imediat:

$$\frac{du}{dx} = 2.$$

Introducând această valoare în formula (10), obținem derivata căutată:

$$y' = \cos u \times 2 = 2 \cos (2x + 5).$$

In cele de mai sus am considerat sinusul ca funcțiune și arcul ca variabilă. Putem lua și invers: arcul ca funcțiune și sinusul ca variabilă. Avem atunci o *funcțiune circulară inversă.*

De data aceasta, arcul fiind funcțiune, îl însemnăm cu y; sinusul fiind variabilă independentă, îl însemnăm cu x. Adică, *x este sinusul arcului y*, ceea ce se traduce matematic prin relația:

$$x = \sin y. \tag{11}$$

Ne-am obișnuit până acum ca litera y, ce reprezintă totdeauna funcțiunea, să figureze singură în membrul I al relațiunilor. Formula (11) calcă această regulă, trimițând pe y în membrul II. Matematicienii însă, cum au prins de veste despre această călcare, au reacționat în consecință, fabricând o formulă echivalentă, care intră în regula cu care am fost obișnuiți până acum.

In adevăr, formula (11), începând cu litera x, ne spune că: *x este sinusul arcului y.* Ia să citim această formulă, începând cu litera y! Vom spune că: *y este arcul al cărui sinus este x.* Sau, mai pe scurt:

$$y = \text{arcul sinusului } x$$

sau și mai pe scurt:

$$y = \text{arc sin } x \tag{12}$$

In modul acesta, formula (11) a căpătat un aspect mai... reglementar! Să cercetăm derivata acestei funcțiuni circulare inverse. Vom lua în considerare formula (11), întru cât ne îngăduie o deducere imediată.

Noi am văzut mai sus că, pentru formula $y = \sin x$, derivata este:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

In mod analog, pentru formula $x = \sin y$ vom scrie derivata:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

de unde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \tag{13}$$

Iată derivata căutată! Să transformăm puțin această expresiune, pentru ca în membrul II să figureze variabila independentă x, nu funcțiunea y.

Știm din Trigonometrie că:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

de unde

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$$

sau

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Să ridicăm la patrat ambii membrii ai relației (11):

$$x^2 = \sin^2 y$$

și să înlocuim mai sus pe $\sin^2 y$ prin x^2:

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Introducem această valoare în (13):

$$y' = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Am obținut astfel expresiunea derivatei pentru funcțiunea *arc sin x*.

O altă funcțiune circulară, foarte des întrebuințată, este:

$$y = \cos x, \tag{14}$$

formulă prin care se anunță că *y este cosinusul arcului x*. In tabelele trigonometrice se găsește, de asemenea, și valoarea numerică a cosinusului, ce corespunde la o serie de arce cuprinse între 0° și 90°.

Pentru a stabili derivata acestei funcțiuni circulare, putem proceda, ca de obicei, trecând prin cele patru operațiuni de calcul. Dar avem la îndemână și o cale mai simplă, bazată pe cunoașterea derivatei sinusului și pe noțiunea de arc complimentar.

Se știe din Geometrie, că două arce sunt *complimentare* când suma lor este egală cu 90°. De pildă, arcul x și arcul a sunt complimentare, dacă:

$$x + a = 90°. \tag{15}$$

Pe de altă parte, Trigonometria ne spune că: *cosinusul unui arc este egal cu sinusul arcului său complimentar.* In cazul de față, cosinusul arcului x este egal cu sinusul arcului complimentar a:

$$\cos x = \sin a.$$

Dar din (15) scoatem:

$$a = 90 - x$$

deci:

$$\cos x = \sin (90 - x).$$

Cu ajutorul acestei relațiuni, funcțiunea (14) se poate pune sub forma unui sinus:

$$y = \sin (90 - x) \tag{16}$$

ceea ce este de folos imediat, căci reduce calculul derivatei unui cosinus la cazul cunoscut, al derivatei unui sinus.

Să calculăm, așa dar, derivata expresiunei (16). Observăm că avem aici o funcțiune de funcțiune; punem deci:

$$90 - x = u$$

așa că formula (16) se mai scrie:

$$y = \sin u.$$

Derivata funcțiunii y, în raport cu variabila u, se scrie imediat. Este cos u:

$$\frac{dy}{du} = \cos u.$$

Pentru a trece la derivata lui y în raport cu variabila x, luăm relația cunoscută:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

și introducem în ea valoarea lui $\frac{dy}{du}$ scrisă mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times \frac{du}{dx}. \tag{17}$$

Raportul $\frac{du}{dx}$ reprezintă și el o derivată: este derivata funcțiunii u, în raport cu variabila x. Cum funcțiunea u este:

$$u = 90 - x$$

derivata se scrie:

$$\frac{du}{dx} = -1.$$

Introducem această valoare în (17):

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times (-1)$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = -\cos u$$

și, înlocuind pe u cu expresiunea lui:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos (90 - x).$$

In această formulă, arcul este 90—x; după cum se vede, acest arc este complimentar arcului x. Trigonometria ne spune că, *cosinusul unui arc este egal cu sinusul arcului său complimentar*. In cazul de față, putem scrie:

$$\cos (90 - x) = \sin x$$

așa că, formula derivatei de mai sus, devine:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\sin x.}$$

Derivata cosinusului unui arc este egală cu sinusul său, luat cu semnul schimbat.

Să trecem acum la funcțiunea circulară inversă:

$$y = \text{arc cos } x, \tag{18}$$

formulă care spune că: *y este arcul al cărui cosinus este x.* Cu alte cuvinte, x este cosinusul arcului y:

$$x = \cos y.$$

Aici x joacă rol de funcțiune, iar y de variabilă independentă. Cum este vorba de un cosinus, vom scrie imediat derivata lui, bazându-ne pe rezultatul stabilit mai sus:

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y,$$

de unde:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{} \tag{19}$$

După cum se vede, această expresiune reprezintă derivata funcțiunii y din (18). Ne mai rămâne să eliminăm pe y din membrul II al relației (19), introducând în locul lui variabila x.

Pornim dela formula fundamentală din Trigonometrie:

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

de unde scoatem:

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y.$$

Extragem rădăcina:

$$\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Introducem această valoare în (19):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

Am obținut același rezultat ca și pentru derivata funcțiunii arc sin x, cu deosebire că semnul — deschide aici expresia derivatei.

PROBLEME

Să se calculeze derivatele funcțiunilor:

1. $y = \sin^2 x$.
2. $y = \text{tg } x$.
3. $y = \text{arc sin } \frac{x}{a}$.

CAPITOLUL XV

DERIVATE PARȚIALE

Toate funcțiunile cu care am lucrat până acum cuprindeau o singură variabilă: y era funcțiune numai de variabila x, scriindu-se

$$y = f(x).$$

Acesta este cazul cel mai simplu. De cele mai multe ori, funcțiunile sunt determinate de mai multe variabile. Bunăoară, mărimea y poate să fie funcțiune de două variabile, x și z. După modelul notațiunii precedente, vom scrie:

$$y = f(x, z).$$

Având o funcțiune de două variabile independente, este firesc să ne punem întrebarea, ce înțeles capătă aici noțiunea de derivată?

Știm că derivata reprezintă raportul dintre creșterea infinit mică a funcțiunii — *diferențiala funcțiunii* — și creșterea infinit mică a variabilei — *diferențiala variabilei*. In cazul a două variabile, când funcțiunea y crește cu dy, amândouă variabilele x și z variază, prima cu dx, cealaltă cu dz. Cum alcătuim acum derivata?

Pentru mai multă claritate, să considerăm un exemplu concret. Luăm un dreptunghiu, cu laturile x și z (Fig. 1). Suprafața lui este:

$$S = x \times z,$$

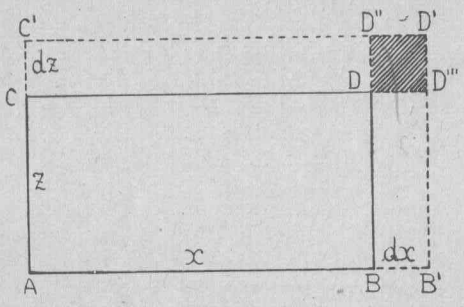


Fig. 1

ceea ce arată că mărimea S este funcțiune de două variabile independente, x și z. Când aceste două variabile primesc creșterile respective dx și dz, dreptunghiul considerat trece dela forma ABCD la forma A'B'C'D'. Suprafața S a dreptunghiului crește astfel cu dS.

Dar această creștere a suprafeței poate fi produsă în două feluri: 1) ambele variabile cresc *simultan*: x crește cu dx, în timp ce z crește cu dz; 2) cele două variabile cresc *succesiv*: mai întâi x crește cu dx (Fig. 2, *a*), z rămânând constant, în tot acest timp; apoi z crește cu dz, rămânând de data aceasta x constant (Fig. 2, *b*).

In prima operație, obținem întreaga creștere dS a suprafeței dreptunghiului; în cea de a doua operație, obținem creșterea dS, din care lipsește însă suprafața $dxdz$ a micului dreptunghi haşurat (Fig. 1). Totuși, putem considera aceste două rezultate ca identice, întru cât suprafața dreptunghiului haşurat este complet neglijabilă, fiind determinată de produsul a doi infinit mici.

Ambele feluri de variații ale lui S fiind echivalente între ele, vom alege pe cea mai comodă. Din punctul de vedere ce-l urmărim aici, cea mai comodă este variația *succesivă* a variabilelor independente. Atunci suprafața S crește cu dS prin două operațiuni distincte, iar în fiecare operație S poate fi tratat ca o funcțiune de o singură variabilă.

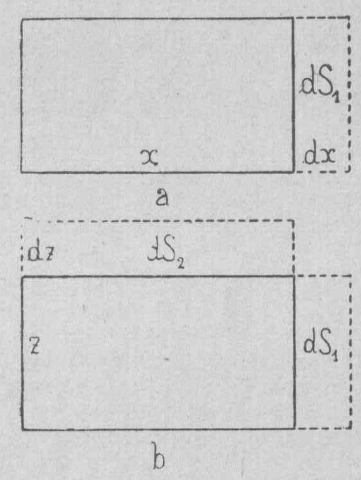


Fig. 2

In adevăr, să considerăm prima operație: x crește cu dx, dar z rămâne constant. Suprafața S a dreptunghiului crește, în consecință, cu dS_1. Totul se petrece ca și cum am avea o funcțiune S de o singură variabilă x. Raportul dintre creșterea infinit mică dS_1 a funcțiunii și creșterea infinit mică dx a variabilei ne dă *derivata* funcțiunii S *pentru acest caz particular*. Deoarece dS_1 este numai o parte din variația ce trebue s'o primească funcțiunea S, derivata obținută în felul acesta a primit numele de «*derivată parțială*»: este derivata parțială a funcțiunii S în raport cu variabila x (considerând cealaltă variabilă ca o constantă).

Trecem acum la cea de a doua operație: z crește cu dz, în timp ce x rămâne constant. Mărimea S se prezintă astfel ca funcțiune de o singură variabilă, z. Raportul dintre creșterea infinit mică dS_2 a funcțiunii și creșterea infinit mică dz a variabilei definește o altă *derivată par-*

țială: este derivata funcțiunii S în raport cu variabila z (considerând cealaltă variabilă, x, constantă).

Așa dar, o funcțiune de o singură variabilă admite o singură derivată; o funcțiune de două variabile admite două derivate. Și tot așa mai departe.

Pentru derivatele parțiale s'a introdus o notație specială, care elimină indicii de cari ne-am folosit și noi mai sus. Anume, în loc de:

$$\frac{dS_1}{dx} \text{ se scrie } \frac{\partial S}{\partial x}$$

și în loc de:

$$\frac{dS_2}{dz} \text{ se scrie } \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Fiecare din aceste expresiuni noi, scrise cu ∂ rond, constitue un simbol. Termenii acestui simbol nu trebuesc separați în calcule; de pildă, în termenul $\frac{\partial S}{\partial x}dx$ ce apare des in calcule, ∂x dela numitor nu poate fi redus cu termenul dx, care înmulțește simbolul. Cu alte cuvinte, numărătorul și numitorul acestui simbol sunt legați indisolubil între ei, neputând fi separați unul de altul.

In rezumat, pentru o funcțiune y de două variabile x și z:

$$y = f(x, z)$$

avem de calculat două derivate parțiale:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ și } \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Exemplu: Considerăm funcțiunea

$$y = ax^2 + 2bxz + 3z^2.$$

Obținem o primă derivată parțială, considerând pe z constant și derivând numai în raport cu x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2ax + 2bz.$$

A doua derivată parțială se obține, luând pe x constant și derivând în raport cu z:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 2bx + 6z.$$

Cu ajutorul derivatelor parțiale putem să exprimăm creșterea infinit mică ce o capătă o funcțiune de mai multe variabile, când aceste variabile primesc creșteri infinit mici.

In adevăr, să ne referim la exemplul precedent: creșterea infinit mică dS a suprafeței dreptunghiulare ABCD se compune din două părți:

$$dS = dS_1 + dS_2. \tag{1}$$

dS_1 reprezintă aria BB'DD''': este creșterea funcțiunii S, când variabila x crește cu dx, variabila z fiind ținută constantă.

dS_2 reprezintă aria CC'DD'': este creșterea funcțiunii S, când variabila z crește cu dz, cealaltă variabilă, x, fiind ținută constantă.

Am văzut că:

$$\frac{dS_1}{dx} = \frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{și} \quad \frac{dS_2}{dz} = \frac{\partial S}{\partial z}$$

de unde:

$$dS_1 = \frac{\partial S}{\partial x}dx \quad \text{și} \quad dS_2 = \frac{\partial S}{\partial z}dz.$$

Introducem aceste relaţiuni în (1):

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}\,dx + \frac{\partial S}{\partial z}\,dz.$$

dS este diferenţiala funcţiunii S; cum această diferenţială cuprinde creşterea infinit mică *totală*, produsă de variaţia ambelor variabile, se spune că ea este o *diferenţială totală*.

Exemplu: Luăm un cilindru cu raza bazei r şi de înălţime I. Volumul V al acestui cilindru este o funcţiune de două variabile şi are ca expresiune:

$$V = \pi r^2 I.$$

Să calculăm creşterea infinit mică dV a acestui volum, când raza bazei creşte cu dr şi înălţimea cu dI. Calculul se poate face pe două căi:

Calea geometrică. Să variem în mod succesiv cele două dimensiuni r şi I ale cilindrului. Mărim mai întâi înălţimea I cu dI, lăsând neschimbată raza bazei. Creşterea de volum dV_1, ce are loc, reprezintă un cilindru mic, cu raza bazei r şi cu înălţimea dI. Deci:

$$dV_1 = \pi r^2 . dI.$$

Considerăm acum cilindrul, în starea lui iniţială, şi facem să crească raza bazei cu dr, păstrând neschimbată înălţimea I. Volumul cilindrului creşte cu dV_2 şi avem:

$$V + dV_2 = \pi(r + dr)^2 I,$$

de unde, înlocuind pe V cu $\pi r^2 I$, avem:

$$dV_2 = \pi(r + dr)^2 I - \pi r^2 I$$

Desvoltăm calculele:

$$dV_2 = \pi r^2 I + 2\pi r dr\, I + \pi(dr)^2 I - \pi r^2 I.$$

Observăm că primul şi ultimul termen din membrul II se reduc, iar termenul $\pi(dr)^2 I$ se elimină, deoarece cuprinde un infinit unic la patrat. Rămâne deci:

$$dV_2 = 2\pi r\ dr . I.$$

Suma acestor două creşteri parţiale de volum dV_1 şi dV_2 ne dă creşterea infinit mică totală dV a volumului cilindrului:

$$dV = \pi r^2 dI + 2\pi r I dr.$$

Calea algebrică. Avem funcţiunea V, de variabilele independente r şi I:

$$V = \pi r^2 I.$$

Cele două derivate parţiale sunt:

$$\frac{\partial V}{\partial I} = \pi r^2 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r I.$$

Diferenţiala totală a funcţiunii V se scrie:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial I}\,dI + \frac{\partial V}{\partial r}\,dr.$$

Introducând aici expresiunile stabilite mai sus pentru cele două derivate parţiale, obţinem direct relaţia lui dV, calculată pe cale geometrică.

PROBLEME

Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiunilor:

1. $u = 2x^2 + 3xy - y^2 + 4x - y + 8.$
2. $y = z^x.$
3. $y = \sqrt{x^2 + z^2}.$

CAPITOLUL XVI

O RAITĂ PRIN DOMENIUL MECANICEI

Acum, după ce ne-am obișnuit cu noțiunea de *derivată* și știm s'o calculăm în cazurile mai principale, să pătrundem puțin în domeniul mecanicei, pentru a urmări câteva din aplicațiunile formulelor precedente. Vom începe cu câteva definițiuni fundamentale, în scopul de a înțelege mai bine considerațiunile ulterioare.

Se numește *mobil* orice corp în mișcare, deci orice corp care poate să-și schimbe poziția față de lucrurile înconjurătoare. Pentru concretizare, ne vom închipui totdeauna mobilul ca o bilă mică, ce se mișcă pe un plan. Problema care se pune la început în Mecanică, este de a determina complet mișcarea unui mobil; adică să putem găsi prin calcul poziția (locul) în care ajunge mobilul, la un moment dat.

Elementele cari determină o mișcare sunt două: *traiectoria* și *legea mișcării.*

Traiectoria reprezintă drumul ce-l descrie mobilul în decursul mișcării. Dacă pe un carton alb și orizontal, dăm drumul unei bile, cufundată mai întâi în cerneală, bila va lăsa o dâră în mișcarea ei. Dâra de cerneală ne arată locurile pe unde a trecut bila, deci drumul descris de mobil, sau încă, traiectoria mobilului. Când traiectoria este o linie dreaptă, spunem că mișcarea este *rectilinie;* când traiectoria este o linie curbă, mișcarea se zice *curbilinie.*

Legea mișcării exprimă dependența dintre *spațiu* și *timp.* Să lămurim această definiție.

Când un mobil execută o mișcare, lungimea străbătută, sau, cum se mai spune, *spațiul* descris, este cu atât mai mare, cu cât a trecut mai mult timp dela începutul mișcării. La fiecare lungime de drum corespunde câte un interval de timp; sau, la o anumită valoare t a intervalului de timp corespunde o anumită valoare s a spațiului străbătut. Aceasta însemnează că una din aceste două mărimi este funcțiune de cealaltă; în mod general se consideră spațiul s ca *funcțiune* iar timpul t ca *variabilă independentă.*

La cap. I, când am vorbit despre variabilă și funcțiune, am spus că expresiunea: *y este funcțiune de x* se traduce în vorbirea matematică prin simbolul:

$$y = f(x).$$

In mod analog, expresiunea: *s este funcțiune de t*, se va scrie:

$$s = f(t),$$

și ea reprezintă forma cea mai generală a legii mișcării.

Se înțelege că putem avea un număr nesfârșit de mare de mișcări, după felul traiectoriei și al relației matematice dintre s și t. Unele din ele au o mai mare însemnătate și asupra lor vom spune câteva cuvinte.

Să presupunem că ni se dă legea mișcării, unde s este funcțiune de t. Derivata φ a acestei funcțiuni, adică raportul dintre creșterea infinit mică ds a funcțiunii și creșterea infinit mică dt a variabilei:

$$\frac{ds}{dt} = \varphi \qquad (1)$$

poartă numele de *iuțeală.* Această iuțeală poate să fie o constantă, sau poate să fie ea însăși o funcție de t. In primul caz mișcarea se numește *uniformă*, în cazul al doilea se zice *variată.*

Iuțeala definită aici, matematic, are o interpretare fizică perfect clară. Pentru mișcarea uniformă, iuțeala exprimă spațiul străbătut de mobil în unitatea de timp.

Deci, când în intervalul de timp t, mobilul străbate lungimea de drum s, iuțeala este dată de raportul:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Pentru mișcarea variată, iuțeala se schimbă necontenit, dela un moment la altul. In decursul intervalului de timp t, iuțeala trece printr'o serie de valori. Fiecare valoare este valabilă numai o clipă, căci în clipa imediat următoare, altă valoare vine la rând. Pentru clipa cât este valabilă valoarea indicată, putem considera mișcarea ca uniformă. Și deci, pentru mișcarea variată, iuțeala dintr'un anumit moment poate fi definită ca spațiul infinit mic, ce-l străbate mobilul într'o unitate de timp infinit mică. Cu modul acesta, iuțeala capătă aceeași semnificație pentru ambele feluri de mișcări.

Pentru mișcările variate, iuțeala v fiind o funcțiune de timpul t:

$$v = f(t),$$

putem să considerăm derivata a a acestei funcțiuni în raport cu variabila t:

$$\frac{dv}{dt} = a. \tag{2}$$

Această derivată poartă numele de *accelerație;* când valoarea ei este o constantă, mișcarea se zice *uniform variată.*

Accelerația a se mai poate pune și sub o altă formă, care scoate în evidență funcțiunea inițială s. Anume, în formula (2) să înlocuim litera v prin expresiunea (1):

$$a = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}.$$

Acest raport se obișnuește să se mai scrie și astfel:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) \tag{3}$$

Se vede de aici că, pentru a obține accelerația unei mișcări, se ia mai întâi derivata spațiului în raport cu timpul și apoi derivata acestei derivate, tot în raport cu timpul. Noi am văzut, la sfârșitul capitolului V, că derivata unei derivate se mai numește și *derivata de ordinul al doilea.* Putem deci enunța că: *accelerația reprezintă derivata a doua a spațiului în raport cu timpul.*

Formula (3) se poate scrie mai comprimat. In adevăr, observăm că în membrul II litera d este repetată de două ori, tot astfel și creșterea infinit mică dt; ca urmare a acestui fapt, s'a adoptat pentru (3) următoarea expresiune simbolică:

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{4}$$

care se citește: *de doi es, supra de te doi.* Această citire ne arată că cifra 2 nu joacă aici rolul de exponent; ea ne indică numai trecerea dela forma (4) la forma (3), unde se vede bine că este vorba de două derivări succesive.

Exemplu: Considerăm un mobil care străbate o traiectorie oarecare, având următoarea lege de mișcare:

$$s = At^2 + Bt + C. \tag{5}$$

Să calculăm iuțeala v și accelerația a.

Iuțeala v se capătă luând derivata în raport cu timpul a funcțiunei s. Factorii A, B și C fiind constante, avem:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2At + B.$$

Să derivăm mai departe:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2A.$$

După cum se vede, accelerația a este egală cu o constantă; așa dar, mișcarea definită de legea (5) este *uniform variată.*

Alt exemplu: Mișcarea vibratoare se execută după legea:

$$s = a \sin \omega t, \tag{6}$$

unde s este *elongația* iar a și ω constante. Avem aici o funcțiune circulară și anume, avem o funcțiune de funcțiune. Vom calcula dar derivata după indicațiile date la cap. XIV. In acest scop, punem:

$$u = \omega t \tag{7}$$

legea mișcării capătă astfel forma:

$$s = a \sin u. \tag{8}$$

Să aflăm derivata funcțiunii s în raport cu variabila auxiliară u. Am văzut că derivata unui sinus este egală cu cosinusul arcului respectiv; în cazul de față, derivata lui sin u este cos u. Pe de altă parte, am văzut la cap. VII că derivata păstrează coeficientul variabilei independente. Deci coeficientul a din formula (8) trece și în derivată. Putem scrie, așa dar:

$$\frac{ds}{du} = a \cos u. \tag{9}$$

Știm că iuțeala unei mișcări reprezintă derivata spațiului în raport cu timpul. Derivata calculată mai sus este luată în raport cu variabila auxiliară u. Pentru a

trece dela $\frac{ds}{du}$ la $\frac{ds}{dt}$ nu avem decât să considerăm formula cunoscută:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{du} \cdot \frac{du}{dt}.$$

Inlocuim pe $\frac{ds}{du}$ din membrul II cu valoarea dată de (9):

$$\frac{ds}{dt} = a \cos u \times \frac{du}{dt}.$$

Termenul $\frac{du}{dt}$ din această relațiune reprezintă derivata funcțiunii u în raport cu variabila t. Funcțiunea $u = \omega t$ are derivata:

$$\frac{du}{dt} = \omega.$$

Așa dar:

$$v = \frac{ds}{dt} = a \cos u \times \omega$$

sau, înlocuind pe u prin ωt:

$$v = a\omega \cos \omega t. \tag{10}$$

Stabilind astfel iuțeala mișcării vibratoare, să mergem mai departe, pentru a calcula accelerația a. Va trebui să luăm derivata iuțelii în raport cu timpul; cum expresiunea (10) este, de asemenea, o funcțiune de funcțiune, vom proceda ca mai sus. Punem:

$$u = \omega t$$

așa că (10) se mai scrie:

$$v = a\omega \cos u. \tag{11}$$

Ştim că derivata cosinusului unui arc este egală cu sinusul, schimbat de semn, al arcului respectiv. In cazul de faţă, derivata lui cos u este —sin u. Derivata funcţiunii φ, în raport cu variabila u, este deci:

$$\frac{d\varphi}{du} = -a\omega \sin u. \tag{12}$$

Pentru ca să trecem la derivata lui φ în raport cu t, luăm formula cunoscută:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

şi înlocuim raportul $\frac{d\varphi}{du}$ cu valoarea lui dată de (12):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a\omega \sin u \times \frac{du}{dt}. \tag{13}$$

Ne mai rămâne raportul $\frac{du}{dt}$: acesta nu este altceva decât derivata funcţiunii u, luată în raport cu t. Cum $u = \omega t$, avem:

$$\frac{du}{dt} = \omega.$$

Introducem această relaţie în (13):

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a\omega \sin u \times \omega$$

Membrul I al acestei formule fiind derivata iuţelii în raport cu timpul, reprezintă *acceleraţia* mişcării date. Inlocuind acum pe u cu ωt, avem:

$$a = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega t. \tag{14}$$

Putem pune această expresiune şi sub o formă mai comprimată. In adevăr, deoarece $s = a \sin \omega t$, putem înlocui în formula (14) produsul $a \sin \omega t$ prin s. Obţinem:

$$a = -\omega^2 s,$$

rezultat care exprimă că: *acceleraţia mişcării vibratoare este proporţională cu elongaţia.*

* * *

Ajunşi la sfârşitul acestor îndrumări în calcularea derivatelor mai simple, să facem bilanţul operaţiunilor de până acum. La capitolul *pierdere* nu avem nimic de trecut, dacă am început munca cu răbdare şi entusiasm, aşa cum, de altfel, trebue pornită orice muncă. Timpul şi energia cheltuită pentru învăţarea derivatelor îşi vor arăta cât de curând roadele binecuvântate. La capitolul *profit* putem înscrie toate cunoştinţele matematice noi, pe care le mânuim acum cu destulă uşurinţă. Iată, într'un tablou rezumativ, funcţiunile generale şi derivatele corespunzătoare, studiate în paginele precedente.

$y = ax^n$	$y' = nax^{n-1}$
$y = u + \varphi$	$y' = u' + \varphi'$
$y = u\varphi$	$y' = \varphi u' + u\varphi'$
$y = \frac{u}{\varphi}$	$y' = \frac{\varphi u' - u\varphi'}{\varphi^2}$
$y = \log x$	$y' = \frac{1}{x}$ (pentru logaritm neperian)
$y = a^x$	$y' = a^x \log a$ (pentru log neperian)
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \text{arc sin } x$	$y' = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \text{arc cos } x$	$y' = -\frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}$

Ca încheere, să spunem câteva cuvinte şi despre înţelesul general al derivatelor.

După cum am văzut, orice derivată ia naştere dintr'o funcţiune, cu ajutorul creşterilor infinit mici. De altă parte, orice funcţiune se întâlneşte oriunde se produce o schimbare, o variaţie. Caracteristica funcţiunilor este de a urmări efectul de ansamblu al variaţiunilor, când acestea nu sunt independente, ci legate între ele într'un fel oarecare. Cade o piatră? Schimbarea ei de poziţie, în cursul căderii, se determină printr'o funcţiune, care este tocmai *legea mişcării*. Se dilată o bară prin încălzire? Variaţia ei de lungime se poate urmări cu ajutorul unei alte funcţiuni, în care variabila independentă este temperatura. Şi aşa mai departe: oriunde e vorba de o variaţie, îşi face regulat apariţia şi o funcţiune, în stare să determine mersul general al variaţiei.

Cunoscând funcţiunea poţi determina diversele etape ale variaţiei şi să-ţi dai astfel seama de aspectul ei caracteristic. Pentru aceasta este însă nevoie să urmăreşti pas cu pas, ce se întâmplă cu y, când x variază necontenit, ceea ce este o cale lungă şi oarecum obositoare.

Matematica îşi dovedeşte şi aici spiritul ei de economie şi de simplificare. Pentru a uşura calea despre care am vorbit, cercetând scurt şi repede o variaţie dată, se chiamă în ajutor derivata. Ea poate să ne spună, fără multă vorbă, în ce fel se prezintă variaţia dată, dacă e mai lentă sau mai rapidă, sau dacă admite un maximum ori un minimum. In plus, derivata ne mai dă putinţa să scoatem la iveală şi elementul constant ce se ascunde cu dibăcie în variaţia cercetată, cum este, de pildă, *acceleraţia*, pentru mişcarea uniform variată. Prin această calitate, derivata poate să excite şi un interes filosofic; ea traduce în termeni precişi, matematici, tendinţa veche a filosofilor ionieni, de a prinde elementul constant din procesul oricărei schimbări naturale. Dacă Pythagora ar fi cunoscut derivata, fără îndoială că ar fi încercat să o substitue elementului fizic, după care îşi frământau capul filosofii hilozoişti.

PARTEA II

CALCULUL INTEGRAL

CAPITOLUL I

PROBLEMA INVERSĂ: SĂ GĂSIM FUNCȚIUNEA DIN CARE SE TRAGE O DERIVATĂ DATĂ

In capitolele precedente am învățat să rezolvăm problema următoare: *dându-se funcțiunea să se găsească derivata.* Voim să tratăm acum problema inversă: *dându-se derivata să se găsească funcțiunea.*

Prima problemă se rezolvă, după cum am văzut, luând raportul a două diferențiale; de aceea, problema aceasta formează obiectul *calculului diferențial.* Problema inversă, prin care trecem dela derivată la funcțiunea primitivă, constitue obiectul *calculului integral.* Vom vedea ceva mai departe rațiunea acestei numiri.

Pentru a înțelege caracterul particular al acestui calcul, vom lua câteva exemple, din cele tratate precedent.

Să considerăm funcțiunea:

$$y = \sin x \tag{1}$$

a cărei derivată știm că este:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \tag{2}$$

Se pune problema: cum putem trece dela expresiunea (2) la expresiunea (1)?

Observăm că în membrul I al relației (1) avem numai litera funcțiunii iar în membrul II numai variabila. Să

facem în (2) această separare: lăsăm în membrul I numai diferențiala funcțiunii, trecând în membrul II diferențiala variabilei. Avem:

$$dy = \cos x . dx. \qquad (3)$$

Să specificăm acum, printr'un semn special, intenția noastră de a trece dela formula (3) la formula (1). Matematicienii întrebuințează în acest scop un S alungit — semnul $\int$ —, care poartă numele de « *integrală* ». Când alăturăm semnul acesta de o diferențială, înseamnă că vrem să facem o « *integrare* », adică să trecem dela diferențiala dată la funcțiunea inițială.

Să anunțăm, așa dar, că vrem să *integrăm* expresiunea (3):

$$\int dy = \int \cos x . dx. \qquad (4)$$

Ca să trecem dela această formulă la (1), nu avem decât să admitem convenția [1]) următoare:

$$\int dy = y$$

$$\int \cos x . dx = \sin x$$

[1]) Această convenție desvăluie caracterul fundamental al calculului integral. In adevăr, formula $\int dy = y$ ne arată trecerea dela mărimea infinit mică dy la mărimea finită y. Cum dy este o parte (infinit mică) din y însemnează că formula adoptată permite reconstituirea, *întregirea* — de unde și numele de *calcul integral* = *calcul întregitor* — mărimei y din părțile ei componente. Calculul reprezintă astfel o *însumare* de cantități infinit mici, în număr infinit mare.

și operația este terminată! Cititorul se va fi așteptat, probabil, să facem o serie de calcule, pentru ca să trecem dela derivată la funcțiunea primitivă, așa după cum a trebuit să facem un șir întreg de calcule, pentru a afla derivata. Intervenția semnului *integrală* rezolvă problema în mod rapid, dar ne obligă, în schimb, să ținem minte convențiile făcute. Mai apare, în plus, și un inconvenient: pierdem constantele ce însoțesc funcțiunea. In adevăr, dacă în locul funcțiunii simple din (1), am avea:

$$y = \sin x + 3 \quad \text{sau} \quad y = \sin x + 8$$

sau, în general:

$$y = \sin x + C$$

în care C este o constantă, toate aceste funcțiuni au aceeași derivată:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Prin integrare, noi regăsim numai sinusul singur, nu și constanta numerică 3, 8, etc. Derivatei date îi corespunde, așa dar, o infinitate de expresiuni, diferite între ele prin valoarea constantei. In consecință, funcțiunea găsită prin integrare va trebui să fie prevăzută totdeauna cu o constantă adițională, despre a cărei valoare numerică nu se poate spune încă nicio vorbă.

Prin urmare, când integrăm expresiunea diferențială:

$$dy = \cos x . dx$$

trebuie să scriem soluția completă sub forma:

$$y = \sin x + C,$$

unde C este « *constanta de integrare* »

Dacă în derivată variabila independentă este înmulțită cu un coeficient constant, acesta trebue trecut ca atare și în funcțiune (vezi Partea I, cap. VII: *derivata păstrează neschimbat coeficientul variabilei independente*). Bunăoară, funcțiunea:

$$y = 3 \sin x$$

are derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos x.$$

Pentru a trece dela derivată la funcțiunea inițială, separăm cele două diferențiale:

$$dy = 3\cos x.dx$$

și anunțăm operația de integrare:

$$\int dy = \int 3\cos x.dx.$$

Integrând primul membru, pe baza convențiunii menționate mai sus, avem:

$$y = \int 3\cos x.dx.$$

Factorul numeric 3, trebuind să se găsească și în expresiunea funcțiunii, însemnează că el nu influențează cu nimic operația de integrare. In consecință, îl vom scrie înafara semnului de integrare:

$$y = 3\int \cos x.dx,$$

și așa vom face totdeauna, când vom avea un coeficient constant care înmulțește expresiunea de integrat.

Soluția integralei precedente o cunoaștem din exemplul cercetat mai sus

$$\int \cos x.dx = \sin x + C$$

așa că:

$$y = 3\int \cos x.dx = 3(\sin x + C) = 3 \sin x + 3C.$$

Cum $3C$ este tot o constantă, vom scrie mai simplu, înglobând pe 3 în valoarea constantei C:

$$y = 3 \sin x + C.$$

Să trecem acum la un exemplu mai complicat, unde este vorba de o funcțiune de funcțiune. De pildă:

$$y = \sin ax. \tag{5}$$

Ca să aflăm derivata acestei funcțiuni, punem ca de obiceiu:

$$u = ax \tag{6}$$

așa că funcțiunea inițială (5) devine:

$$y = \sin u.$$

Derivata funcțiunei y, în raport cu variabila u este:

$$\frac{dy}{du} = \cos u. \tag{7}$$

Pentru a trece la variabila x, luăm formula cunoscută:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

și introducem aici valoarea lui $\frac{dy}{du}$ din (7):

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \times \frac{du}{dx}$$

Pe de altă parte, funcțiunea $u = ax$ ne dă derivata:

$$\frac{du}{dx} = a$$

așa că:

$$\frac{dy}{dx} = a \cos u = a \cos ax. \qquad (8)$$

Iată derivata la care voiam să ajungem! Să căutăm acum ca, pornind dela această derivată, să regăsim funcțiunea inițială.

Separăm mai întâi cele două diferențiale, scriind expresiunea (8) sub forma:

$$dy = a \cos ax . dx$$

și anunțăm operația de integrare, punând semnul respectiv:

$$\int dy = \int a \cos ax . dx.$$

Să cercetăm acum membrul II: nu găsim în el expresiunea simplă $\cos x . dx$, care prin integrare știm că dă $\sin x + C$. Expresiunea lui este ceva mai complicată; vom căuta însă s'o aducem la forma simplă, pe care o cunoaștem.

Mai întâi, potrivit învățăturii trase din exemplul precedent, vom pune constanta a înafara semnului de integrare. Avem astfel:

$$y = a \int \cos ax . dx. \qquad (9)$$

Introducem o variabilă ajutătoare u, definită prin relația:

$$u = ax$$

a cărei derivată este:

$$\frac{du}{dx} = a$$

de unde:

$$dx = \frac{du}{a}$$

Inlocuim în (9) pe $\cos ax$ prin $\cos u$ și pe dx prin $\frac{du}{a}$:

$$y = a \int \cos u . \frac{du}{a} .$$

Scoatem numitorul constant a în afara semnului de integrare:

$$y = \int a \times \frac{1}{a} \int \cos u . du$$

și reducem termenul a; avem:

$$y = \int \cos u . du.$$

Noi am văzut mai sus că $\int \cos x . dx = \sin x + C$; tot astfel:

$$\int \cos u . du = \sin u + C,$$

și înlocuind pe u cu ax, pentru a reveni la variabila inițială x, obținem:

$$y = \sin ax + C,$$

adică am regăsit funcțiunea inițială (5).

O altă funcțiune circulară, despre care a fost vorba la cap. XIV, este:

$$y = \cos x \tag{10}$$

ce are ca derivată:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x. \tag{11}$$

Să cercetăm trecerea inversă, dela derivată la funcțiune.

Separăm mai întâi diferențialele din (11):

$$dy = -\sin x.dx$$

și anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int -\sin x.dx.$$

Știm că integrarea membrului I ne dă însăși funcțiunea y:

$$y = \int -\sin x.dx. \tag{12}$$

Să comparăm (12) cu (10): membrul I fiind același la ambele formule, urmează că și membrul II să fie același. Adică, putem scrie:

$$\int -\sin x.dx = \cos x. \tag{13}$$

In felul acesta, formula (12) devine identică cu (10), ceea ce însemnează că am reușit să găsim funcțiunea (10), ce corespunde derivatei (11).

Mai putem scrie formula (13) și sub altă formă:

$$\int \sin x.dx = -\cos x + C, \tag{14}$$

unde semnul — a fost trecut în membrul II și am alăturat inevitabila constantă C de integrare.

Dacă în (10) considerăm și un coeficient constant, de pildă:

$$\frac{dy}{dx} = -A \sin x$$

atunci:

$$\int dy = \int -A \sin x.dx.$$

Scoatem constanta A în afara semnului de integrare:

$$y = -A \int \sin x.dx$$

și, ținând seamă de formula (14) de integrare, avem:

$$y = -A(-\cos x + C)$$

sau

$$y = A \cos x + C.$$

Am dat aici constantei C semnul + și nu semnul — (cum ar trebui, dacă ținem seamă strict de regula semnelor), deoarece am voit să nu părăsim regula generală, că funcțiunea găsită prin integrare are o constantă *adițională*. De altfel, necunoscând valoarea constantei C, înlocuirea semnului — prin + nu aduce niciun prejudiciu formulei.

Incheiem acest capitol, punând în evidență *formulele de integrare* de care ne-am servit și care trebuesc reținute, pentru a fi folosite în cazuri similare:

$$\int dy = y + C$$

$$\int \cos x . dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x . dx = -\cos x + C$$

PROBLEME

Să se calculeze integralele:

1. $\int 5dy.$

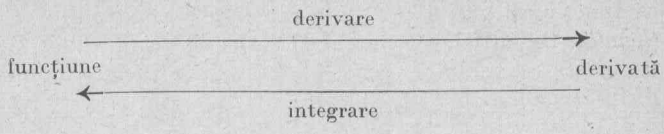
2. $\int 4 \cos (2x + 1)dx.$

3. $\int A \sin (x + 3)dx.$

CAPITOLUL II

ALTE FORMULE DE INTEGRARE

Am văzut, în capitolul precedent, ce însemnează o « *integrare* »: este operația prin care pornim dela o derivată și căutăm să descoperim funcțiunea din care se trage. Cu alte cuvinte, integrarea este inversul derivării. Putem concretiza aceste definiții prin schema:



Din exemplele cercetate până acum s'a putut vedea bine în ce consistă o integrare: se transformă derivata în diferențială și se adaugă în ambii membri semnul $\int$. Apoi se examinează asemănarea dintre expresiunea obținută și *formulele de integrare*. Dacă există o formulă de integrare, perfect identică cu expresiunea noastră, atunci soluția corespunzătoare formulei de integrare convine și expresiunei noastre. Acesta este, de altfel, cazul cel mai rar. De obicei, putem prinde numai o asemănare între expresiunea noastră și una din formulele de integrare. In asemenea cazuri, trecem dela simpla asemănare la perfecta identitate, prin anumite transformări convenabile (de pildă, alegerea unei variabile auxiliare, ca în cazul funcțiunii de funcțiune). Odată obținută identitatea între formule, soluția se scrie imediat.

Rolul cel mai însemnat în această operație îl deține, firește, *formula de integrare*, care ne furnizează direct soluția căutată. Am dat în capitolul trecut trei formule de integrare; continuăm acum cu calculele, pentru a stabili și alte formule de soiul acesta.

Să considerăm funcțiunea:

$$y = x^n \tag{1}$$

a cărei derivată știm că este:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \tag{2}$$

Pentru a trece dela derivată la funcțiunea inițială, separăm cele două diferențiale:

$$dy = nx^{n-1}\, dx.$$

și, ca să dăm formulei un aspect mai general, vom pune:

$$n - 1 = m \tag{3}$$

așa că:

$$dy = nx^m dx.$$

Anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int nx^m dx.$$

Membrul I știm că reprezintă mărimea y; în membrul II să scoatem afară factorul constant n:

$$y = n\int x^m dx. \tag{4}$$

Să comparăm formula (1) cu (4): membrul I fiind același la ambele formule, urmează că și membrul II să fie același, adică avem:

$$n\int x^m dx = x^n$$

de unde:

$$\int x^m dx = \frac{x^n}{n}.$$

Din (3) scoatem: $n = m+1$, deci:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \tag{5}$$

unde C este constanta de integrare. Am obținut aici o altă *formulă de integrare.*

Exemplu: F.e derivata

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

la care să aflăm funcțiunea inițială. Mai putem scrie:

$$dy = 4x^3 dx$$

și deci:

$$\int dy = \int 4x^3 dx$$

sau:

$$y = 4\int x^3 dx.$$

Se vede imediat că integrala din membrul II este de forma $\int x^m dx$, ce are ca soluție $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ In cazul de față, $m = 3$, deci:

$$y = 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1} + \text{constanta}\right).$$

Reducem pe 4 dela numărător cu 4 dela numitor:

$$y = x^4 + C$$

adică am obținut funcțiunea inițială, din care se trage derivata dată.

Luăm alt exemplu, cu exponent fracționar:

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{2}{3}}$$

de unde:

$$dy = x^{\frac{2}{3}} dx.$$

Anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

deci:

$$y = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx.$$

Membrul II este tot de forma $\int x^m dx$, unde $m = \frac{2}{3}$; vom calcula deci soluția după formula generală $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. Avem astfel:

$$y = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

și, făcând calculele:

$$y = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

sau:

$$y = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C.$$

Luăm un alt exemplu, cu exponent negativ. Fie derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{-4}.$$

Separăm diferențialele:

$$dy = 3x^{-4} dx$$

și deci:

$$\int dy = \int 3x^{-4} dx$$

sau:

$$y = 3 \int x^{-4} dx.$$

Integrala din membrul II este tot de forma $\int x^m\, dx$, în care $m = -4$; soluția va fi, deci:

$$y = 3 . \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$$

sau:

$$y = 3 . \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

și, reducând pe 3:

$$y = -x^{-3} + C.$$

Alt exemplu. Considerăm derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

deci:

$$\int dy = \int dx$$

sau:

$$y = \int dx. \tag{6}$$

In partea I, cap. VI, am văzut că, dacă funcțiunea se reduce la variabila singură, derivata ei este egală cu unitatea. Aceasta înseamnă că, derivata considerată mai sus se trage din funcțiunea:

$$y = x + C. \tag{7}$$

Identificând pe (6) cu (7), obținem:

$$\int dx = x + C$$

care este o altă *formulă de integrare.*

La acest rezultat ajungem și pe altă cale, prin aplicarea formulei de integrare (5). In adevăr, putem să scriem derivata dată și sub forma:

$$\frac{dy}{dx} = x^0,$$

știind că, orice cantitate ridicată la puterea zero este egală cu unitatea: $x^0 = 1$.

Separăm acum diferențialele:

$$dy = x^0 dx$$

și integrăm:

$$y = \int x^0 \, dx.$$

Integrala din membrul II este tot de forma $\int x^m \, dx$, unde $m = 0$. Soluția este deci:

$$y = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

sau:

$$y = x + C$$

ceea ce dovedește că:

$$\int x^0 \, dx = \int dx = x + C.$$

Din toate exemplele studiate mai sus rezultă că, ori de câte ori derivata dată reprezintă o putere oarecare a variabilei independente, funcțiunea inițială se scrie direct, cu ajutorul formulei de integrare (5). Se excepteză un singur caz, când $m = -1$; atunci:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \tag{8}$$

și deci:

$$y = \int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} = \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

rezultat inacceptabil, căci din expresiunea $y = \infty$ nu putem obține nicicând derivata (8). Să vedem însă, dacă nu putem să ocolim acest insucces al formulei generale, ca să ajungem pe altă cale la funcțiunea inițială.

Observăm că derivata (8) se mai poate scrie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{9}$$

adică, derivata este egală cu inversul variabilei. La cap. XII am văzut că derivata funcțiunii logaritmice este egală cu inversul variabilei, în sistemul neperian. Prin urmare, funcțiunea din care se trage derivata precedentă este:

$$y = \log x. \tag{10}$$

Cunoscând astfel funcțiunea ce corespunde derivatei (9), să stabilim *formula de integrare*. Separăm în (9) cele două diferențiale:

$$dy = \frac{dx}{x}$$

și anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int \frac{dx}{x}$$

de unde:

$$y = \int \frac{dx}{x} . \tag{11}$$

Expresiunea (10) fiind identică cu (11), scoatem:

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \tag{12}$$

cu observația că logaritmul cuprins în această formulă este un logaritm neperian.

Am obținut aici o nouă *formulă de integrare;* ea se va putea aplica ori de câte ori vom constata că sub semnul de integrare se găsește o fracțiune, la care numărătorul este diferențiala numitorului.

Exemplu: considerăm derivata stabilită la cap. XIII:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{2x^2 + 1} .$$

Separăm diferențialele și anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int \frac{4x}{2x^2 + 1} . dx$$

de unde:

$$y = \int \frac{4x}{2x^2 + 1} dx. \tag{13}$$

La prima vedere, s'ar părea că integrala noastră nu are cea mai mică asemănare cu vreuna din formulele de integrare stabilite mai sus. Mai avem însă un criteriu de aplicat: să cercetăm dacă nu cumva diferențiala numitorului este identică cu numărătorul.

Numitorul fiind $2x^2+1$, are ca derivată $4x$ iar ca diferențială $4x.dx$; după cum se vede, această diferențială este identică cu numărătorul expresiunei de integrat. Aceasta însemnează că integrala noastră se poate rezolva, aplicând *formula de integrare* (12). In adevăr, putem să transformăm expresiunea dată, făcând-o identică cu (12); nu avem decât să punem:

$$u = 2x^2 + 1$$

și să luăm derivata:

$$\frac{du}{dx} = 4x$$

de unde:

$$du = 4x.dx.$$

In formula (13) să înlocuim numărătorul $4x.dx$ prin du iar numitorul $2x^2+1$, prin u. Obținem:

$$y = \int \frac{du}{u} ,$$

expresiune care este de forma $\int \frac{dx}{x}$. Soluția va fi, potrivit formulei (12):

$$y = \log u + C.$$

Inlocuim pe u cu valoarea lui:

$$y = \log (2x^2 + 1) + C,$$

şi am rezolvat astfel problema propusă.

Pentru a încheia acest capitol, să cercetăm şi integrarea funcţiunii exponenţiale. La cap. XIII am văzut că funcţiunea:

$$y = a^x \tag{14}$$

are ca derivată, în sistemul logaritmilor neperieni,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log a \tag{15}$$

Ca să stabilim calea de trecere dela (15) la (14), vom proceda ca de obicei, separând mai întâi diferenţialele:

$$dy = a^x \log a \,.\, dx.$$

Anunţăm integrarea:

$$\int dy = \int a^x \log a \,.\, dx.$$

Membrul I reprezintă, după cum ştim, funcţiunea y; în membrul II vom scoate factorul constant $\log a$ în afara semnului de integrare:

$$y = \log a \int a^x dx. \tag{16}$$

Formulele (16) şi (14) reprezintă aceeaşi funcţiune y; deci membrul II este acelaşi pentru ambele formule:

$$\log a \int a^x \, dx = a^x$$

de unde scoatem:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C,$$

care este o altă *formulă de integrare.*

Să considerăm în ceastă formulă $a = e$ (baza logaritmilor neperieni): atunci:

$$\int e^x dx = \frac{e^x}{\log e} + C.$$

Ştim din cap. XIII că, în sistemul neperian, $\log e = 1$; ne rămâne deci:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

relaţie ce reprezintă o altă *formulă de integrare.*

PROBLEME

Să se calculeze integralele:

1. $\int 2x^7 dx.$
2. $\int \frac{dx}{x + 1}.$
3. $\int a^{2x} dx.$

CAPITOLUL III

CÂTEVA REGULI DE INTEGRARE

Formulele de integrare, stabilite precedent, ne indică imediat funcţiunea iniţială, când derivata propusă este un simplu monom. Dar, de cele mai multe ori, întâlnim în

aplicațiunile practice derivate compuse din mai multe monoame. Cum putem integra o astfel de derivată polinom?

Să considerăm funcțiunea:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{1}$$

a cărei derivată este:

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c. \tag{2}$$

Să cercetăm prin ce cale putem trece dela derivata (2) la funcțiunea inițială (1).

Separăm mai întâi cele două diferențiale din membrul I:

$$dy = (3ax^2 + 2bx + c)\,dx$$

sau:

$$dy = 3ax^2dx + 2bx.dx + c.dx$$

și anunțăm integrarea:

$$\int dy = \int 3ax^2dx + 2bx.dx + c.dx. \tag{3}$$

Comparând pe (3) cu (1), observăm că fiecare termen al expresiunei (1) rezultă din integrarea câte unui termen din (3). Anume:

$$\int 3ax^2dx = 3a\int x^2.dx = 3a.\frac{x^3}{3} = ax^3 + \text{constanta}.$$

$$\int 2bx.dx = 2b\int x.\,dx = 2b.\frac{x^2}{2} = bx^2 + \text{constanta}.$$

$$\int c.dx = c\int dx = cx + \text{constanta}.$$

Să adunăm membru cu membru aceste expresiuni:

$$\int 3ax^2dx + \int 2bx.dx + \int c.dx = ax^3 + bx^2 + cx + \text{constanta}.$$

Se vede imediat că membrul II al acestei relațiuni reprezintă funcțiunea y din (1), în care putem să identificăm pe d cu constanta de integrare. Vom scrie, deci:

$$\int 3ax^2dx + \int 2bx.dx + \int c.dx = y. \tag{4}$$

Pe de altă parte, expresiunea (3) ne dă:

$$y = \int 3ax^2.dx + 2bx.dx + c.dx. \tag{5}$$

Aceste două expresiuni, (4) și (5), cuprind aceeași funcțiune y; egalându-le, obținem:

$$\int 3ax^2dx + 2bx.dx + c.dx = \int 3ax^2dx + \int 2bx.dx + \int c.dx$$

de unde scoatem regula următoare: *integrala unei sume de mai multe diferențiale este egală cu suma integralelor diferențialelor componente.*

Se înțelege că, aici, cuvântul *sumă* are semnificația algebrică cunoscută: unii termeni ai sumei au semnul +, alții au semnul —. Fiecare termen se introduce sub integrală cu semnul său.

De pildă, să considerăm derivata:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4\sin x + 2a.$$

Pentru a afla funcţiunea primitivă, separăm mai întâi diferenţialele:

$$dy = 3x^2dx - 4 \sin x.dx + 2a.dx$$

şi anunţăm integrarea:

$$y = 3\int x^2.dx - 4\int \sin x.dx + 2a\int dx. \qquad (6)$$

Integralele din membrul II fiind foarte simple, se rezolvă imediat:

$$\int x^2dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + \text{constanta.}$$

$$\int \sin x.dx = -\cos x + \text{constanta.}$$

$$\int dx = x + \text{constanta.}$$

Introducem aceste expresiuni în (6):

$$y = 3\left(\frac{x^3}{3} + \text{const.}\right) - 4(-\cos x + \text{const.}) + 2a(x + \text{const.})$$

Adunăm toate constantele de integrare şi însemnăm cu C suma lor:

$$y = x^3 + 4\cos x + 2ax + C.$$

Am obţinut astfel funcţiunea din care se trage derivata dată.

Considerăm acum cazul când derivata dată este un produs de două funcţiuni ale aceleaşi variabile:

$$\frac{dy}{dx} = (x+2)(x-a)$$

de unde:

$$dy = (x+2)(x-a)\,dx$$

şi deci:

$$y = \int (x+2)(x-a)\,dx. \qquad (7)$$

Pentru a integra această expresiune, să facem produsul celor două paranteze:

$$(x+2)(x-a) = x^2 + 2x - ax - 2a$$
$$= x^2 + x(2-a) - 2a$$

Introducem acest produs în (7):

$$y = \int \left[x^2 + x(2-a) - 2a \right] dx.$$

Membrul II se prezintă acum ca o sumă de mai multe diferenţiale. Să aplicăm regula precedentă, după care integrala unei sume este egală cu suma integralelor:

$$y = \int x^2dx + (2-a)\int x.dx - 2a\int dx.$$

Integrând fiecare termen în parte, obţinem:

$$y = \frac{x^3}{3} + (2-a)\frac{x^2}{2} - 2ax + \text{constanta.}$$

care este funcţiunea din care se trage derivata dată.

In sfârșit, să considerăm cazul când derivata dată este o fracție rațională, cum e, de pildă:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2x - 2}{x - 3}$$

Separând diferențialele și anunțând integrarea, avem:

$$y = \int \frac{x^2 - 2x - 2}{x-3}\, dx. \qquad (8)$$

Singura cale de urmat aici este împărțirea directă a numărătorului prin numitor:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2x - 2 : x - 3 = x + 1 \\ \underline{-x^2 + 3x} \\ \quad = \quad x - 2 \\ \quad\quad \underline{-x + 3} \\ \quad\quad\quad = +1 \end{array}$$

Știm că deîmpărțitul este egal cu împărțitorul înmulțit cu câtul, plus restul. Deci, în cazul de față:

$$x^2 - 2x - 2 = (x - 3)(x + 1) + 1$$

de unde, împărțind ambii membri cu $x-3$:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x - 3} = (x + 1) + \frac{1}{x - 3}.$$

Membrul I al acestei relațiuni este tocmai expresiunea de sub integrala (8); această integrală se mai poate pune, deci, și sub forma:

$$y = \int \left[(x + 1) + \frac{1}{x - 3}\right] dx.$$

Integrala acestei sume este egală cu suma integralelor:

$$y = \int x.dx + \int dx + \int \frac{1}{x - 3}\, dx.$$

Primele două integrale se rezolvă ușor:

$$y = \frac{x^2}{2} + x + \text{const.} + \int \frac{1}{x - 3}\, dx. \qquad (9)$$

Observăm, la ultima integrală, că numărătorul este diferențiala numitorului; un asemenea caz l-am mai întâlnit și în capitolul precedent. Pentru rezolvare, punem: $x-3=u$, deci $dx=du$. Integrala din (9) se scrie atunci:

$$\int \frac{1}{x - 3}\, dx = \int \frac{du}{u}.$$

Dar $\int \frac{du}{u}$ se identifică cu *formula de integrare* ce are ca soluție $\log u + \text{const.}$ Așa dar:

$$\int \frac{1}{x - 3}\, dx = \log (x - 3) + \text{const.}$$

Rezolvând și această integrală, expresiunea (9) se scrie:

$$y = \frac{x^2}{2} + x + \log (x - 3) + \text{constanta},$$

obținând astfel funcțiunea y din care se trage derivata dată.

PROBLEME

Să se calculeze integralele:

1. $\int (x^3 + 2)\, dx.$

2. $\int (x + 4)^3\, dx.$

3. $\int (2x+1)\,(2x-1)\, dx.$

CAPITOLUL IV

ARTA DE A INTEGRA

Dacă aflarea unei derivate este o operație, în general simplă, pe care o duci ușor la capăt, în schimb operația inversă, *integrarea*, întâmpină oarecari greutăți.

Principiul integrării constă, după cum am văzut, în transformarea expresiunii date într'o expresiune direct integrabilă, adică într'o expresiune care figurează printre *formulele de integrare*. In această transformare convenabilă sălășluește toată greutatea: este o operație care cere rutină de calcul, un ochiu special educat să vadă dintr'odată formula de integrare ce se ascunde în dosul expresiunii date. Iată calitățile cu care trebue să fie înzestrat un bun matematician! Iată de ce integrarea este și știință dar și artă; cere și cunoștințe, dar și aptitudini.

Dar cine nu este matematician? Să renunțe la plăcerile calculului integral? Să se lipsească de aceste «*rebusuri*», a căror deslegare este, cel puțin, tot atât de folositoare și de educativă ca și deslegarea problemelor de cuvinte încrucișate din revistele rebusiste?

Nu! Plăcerile și foloasele calculului integral pot fi împărtășite tuturor, cu răbdare și bunăvoință. Se găsesc în limbile străine o mulțime de cărți dedicate calculului integral, unde se indică soluția integralelor mai des întâlnite în aplicațiile practice. Dacă vei întâlni în cursul lecturilor științifice vreo integrală rebelă, pe care n'o poți deslega atunci, nu-ți pierde nădejdea, iubite cititor: deschide o carte de integrale și vei fi imediat satisfăcut! Oare nu procedezi la fel și cu problemele de rebus, când răsfoiești dicționare ca să descoperi fluviul din Franța în două vocale (*Aa*) sau pe regele Longobarzilor dela 712—744 (Liutprand)?

Să fim bine înțeleși: nu există reguli generale cu care să se rezolve simplu și repede orice integrală. Fiecare integrală apare pe hârtie cu un crâmpei de mister; ea nu cedează ușor criteriilor raționale, studiate precedent. De fiecare dată artificiul de calcul este altul, căci fiecare integrală are o individualitate specială, prin care se depărtează mai mult sau mai puțin de formulele *standard*, integrabile direct. Pentru ca să se vadă în ce măsură intervin aici artificiile de calcul, vom da câteva exemple mai simple.

Considerăm integrala:

$$y = \int \cos^2 x\, .\, dx. \qquad (1)$$

Membrul II nu se identifică cu niciuna din *formulele de integrare* cunoscute. Dar Trigonometria ne pune la îndemână o mulțime de relațiuni; să vedem dacă nu cumva unele din ele nu ne permit să transformăm expresiunea dată într'o expresiune direct integrabilă.

Cunoaștem două formule trigonometrice, în care intervine $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Să adunăm membru cu membru aceste egalități; $+\sin^2 x$ se reduce cu $-\sin^2 x$ și ne rămâne:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

de unde:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Introducem această expresiune în (1):

$$y = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx.$$

Mai putem scrie:

$$y = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)dx$$

sau, cum integrala unei sume este egală cu suma integralelor:

$$y = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x.dx. \qquad (2)$$

Prima integrală din membrul II se rezolvă imediat:

$$\frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + \text{constanta}. \qquad (3)$$

Ca să rezolvăm cealaltă integrală, punem: $2x = u$, deci:

$$\frac{du}{dx} = 2 \quad \text{de unde} \quad dx = \frac{du}{2}$$

Introducem variabila u în expresiunea integralei:

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x.dx = \frac{1}{2}\int \cos u.\ \frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int \cos u.du.$$

Am ajuns acum la o expresiune direct integrabilă, căci $\int \cos u.du$ este identică cu $\int \cos x.dx$, a cărei soluție știm că este: $\sin x + C$. Putem scrie:

$$\frac{1}{4}\int \cos u.du = \frac{1}{4}\sin u + \text{constanta}. \qquad (4)$$

Să introducem soluțiile (3) și (4) în formula (2); obținem:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + \text{constanta}.$$

Aceasta e funcțiunea care corespunde derivatei (1).

Alt exemplu:

$$y = \int \frac{x.dx}{\sqrt{a - x^2}}. \qquad (5)$$

Pentru a reduce această expresiune la o formulă de integrare, punem:

$$a - x^2 = u$$

de unde:

$$\frac{du}{dx} = -2x \quad \text{și deci} \quad x.dx = -\frac{du}{2}.$$

Introducem aceste relațiuni în (5):

$$y = \int \frac{\frac{-du}{2}}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$

sau încă:

$$y = -\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du. \qquad (6)$$

Această expresiune este de forma $\int x^m\,dx$, a cărei soluție o cunoaștem. Avem deci:

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + \text{const.}$$

sau:

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = -u^{\frac{1}{2}} + \text{const.}$$

și, revenind la variabila x:

$$y = -\sqrt{a - x^2} + \text{const.}$$

care este funcțiunea corespunzătoare derivatei (5).

CAPITOLUL V

IARĂȘI PUȚINĂ MECANICĂ

Am spus în partea I, cap. XVI că, pentru a determina o mișcare, este nevoie să cunoaștem *legea* ei. Legea se reprezintă printr'o formulă matematică, în care *spațiul s*, adică lungimea drumului străbătut, este funcție de *timpul t*, în care se străbate acest spațiu. Ca exemplu de lege a mișcării am dat:

$$s = At^2 + Bt + C,$$

unde A, B, C sunt constante. De asemenea, relația:

$$s = a \sin \omega t,$$

în care a și ω sunt constante, exprimă o lege de mișcare, și anume, este *legea mișcării vibratoare.*

Să luăm un exemplu concret: un mobil execută o mișcare rectilinie (străbate un drum în linie dreaptă), potrivit legii:

$$s = 3t^2. \qquad (1)$$

Spunem că această relație determină complet mișcarea, deoarece ne îngăduie să cunoaștem poziția mobilului pe traiectorie, în orișicare moment. De pildă, să aflăm poziția mobilului după 3 secunde de mers.

Fie O poziția de plecare a mobilului. Insemnăm cu *zero* momentul când pornește mobilul; este *momentul inițial* sau *origina timpului* și corespunde condiției $t=0$. Pentru a găsi poziția mobilului după 3 secunde de mers, vom calcula valoarea spațiului s_3, pentru $t=3$. Avem, din (1):

$$s_3 = 3 \times 3^2 = 27.$$

Dacă facem convenția să măsurăm distanțele în centimetri, putem spune că, după 3 secunde de mers, mobilul nostru a ajuns la o depărtare de 27 cm dela punctul de plecare. Și așa mai departe: dându-se valoarea t a timpului, *legea mișcării* ne îngăduie să stabilim imediat valoarea spațiului corespunzător.

Cu aceasta nu am terminat însă studiul mișcării; trebue să scoatem din legea mișcării cele două mărimi caracteristice, *iuțeala* și *accelerația.*

După cum am văzut la cap. XVI, iuțeala reprezintă derivata spațiului în raport cu timpul. Deci, pentru ca

să aflăm iuțeala v a mișcării determinate de legea (1), vom calcula derivata respectivă:

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \times 3t = 6t. \qquad (2)$$

Cu ajutorul acestei formule putem să calculăm iuțeala mobilului în oricare moment al mișcării. De pildă, după 3 secunde de mers, adică la momentul $t=3$, mobilul are o iuțeală v_3:

$$v_3 = 6 \times 3 = 18 \text{ unități de iuțeală.}$$

Accelerația reprezintă derivata iuțelii în raport cu timpul. In cazul nostru, iuțeala fiind dată de expresiunea (2), derivata ei este:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6 \text{ unități de accelerație.}$$

Accelerația a este aici o constantă, ceea ce dovedește că mișcarea determinată de legea (1) este o *mișcare uniform variată.*

Așa dar, cunoscând legea mișcării. calculul diferențial ne îngăduie să aflăm iuțeala și accelerația mobilului. Calculul integral ne îngăduie operația inversă: cunoscând accelerația unui mobil, ajungem să determinăm *legea mișcării* lui.

In adevăr, să considerăm exemplul precedent, dar luat invers: un mobil se mișcă cu o accelerație constantă de 6 unități; care este legea mișcării lui?

Accelerația fiind de 6 unități, putem scrie:

$$\frac{dv}{dt} = 6 \qquad (3)$$

de unde:

$$dv = 6.dt.$$

Integrăm:

$$\int dv = \int 6.dt.$$

Fiind vorba de două integrale simple, soluția se scrie imediat:

$$v = 6t + \text{constanta.} \qquad (4)$$

Am regăsit astfel formula (2), la care se adaugă însă o constantă de integrare. Cititorul ar putea să protesteze, și pe drept cuvânt, împotriva acestei complicațiuni introdusă de calculul integral. De ce fabrică integrarea o constantă în plus, dacă formula (2) nu o prevede? Calculul integral trebue să regăsească exact jaloanele prin care a trecut calculul diferențial, să nu se abată zadarnic pe căi lăturalnice.

Să dăm curs acestei protestări, deschizând o anchetă asupra constantei de integrare din (4). Constanta de integrare fiind... constantă, ea își păstrează aceeași valoare în orice moment al mișcării, deci și în momentul $t=0$. Fie v_0 iuțeala mobilului în acel moment; formula (4) ne dă:

$$v_0 = 6 \times 0 + \text{constanta,}$$

sau:

$$v_0 = \text{constanta.}$$

Cu alte cuvinte, constanta de integrare din formula (4) reprezintă iuțeala ce o are mobilul la origina timpului (adică în momentul în care începem să socotim intervalele de timp). Inlocuind în (4) constanta de integrare prin v_0, obținem formula generală a iuțelii, pentru mișcarea dată:

$$v = 6t + v_0. \qquad (5)$$

Să convenim a măsura timpul exact din momentul în care mobilul nostru porneşte la drum. Aceasta înseamnă că, la origina timpului, deci în momentul $t=0$, mobilul se află încă în repaos, iuţeala lui fiind nulă: $v_0=0$. In consecinţă, formula (5) se scrie:

$$v=6t,$$

deci am regăsit formula (2). Se dovedeşte astfel că integrarea nu a adus formulei (2) nicio complicaţie inutilă, ci i-a dat o structură mai generală. Căci formula (2) nu este decât un caz particular al formulelor (4) sau (5), valabil numai atunci când origina timpului coincide cu origina mişcării.

După ce am regăsit iuţeala mişcării considerate:

$$v=\frac{ds}{dt}=6t \qquad (6)$$

să mergem mai departe, pentru a obţine şi legea mişcării. Separăm diferenţialele din (6):

$$ds=6t.dt$$

şi anunţăm integrarea, rezolvând-o în acelaşi timp pentru membrul I:

$$s=\int 6t.dt=6\int t.dt.$$

Integrala din membrul II este de forma $\int x^m.dx$, unde $m=1$. Soluţia este:

$$s=6\times\frac{t^2}{2}+\text{constanta}$$

sau:

$$s=3t^2+\text{constanta}. \qquad (7)$$

Am regăsit formula (1), însoţită de inevitabila constantă de integrare. Pentru a descoperi natura acestei constante, vom proceda ca adineaori, cercetând ce devine formula (7), la momentul $t=0$. Insemnând cu s_0 valoarea spaţiului în acel moment, avem:

$$s_0=3\times 0^2+\text{constanta}$$

sau:

$$s_0=\text{constanta}.$$

Aşa dar, constanta de integrare din formula (7) determină poziţia ce o ocupă mobilul la origina timpului. Mai precis, s_0 reprezintă distanţa măsurată pe traiectorie, dela un punct arbitrar ales (origina spaţiului), până în punctul unde se află mobilul la momentul $t=0$. Origina spaţiului fiind arbitrară, putem s'o considerăm chiar în punctul unde se găseşte mobilul la $t=0$. Atunci $s_0=0$ şi deci formula (7) se reduce la:

$$s=3t^2,$$

ceea ce este tocmai formula (1). Am rezolvat astfel problema dată: am pornit dela acceleraţia mobilului şi prin două integrări succesive am reuşit să ajungem la legea mişcării.

Dar tratarea precedentă am făcut-o într'un caz particular, prin eliminarea treptată a constantelor de integrare. Să reluăm acest studiu, păstrând de astă dată toate constantele de integrare; şi, pentru mai multă generalitate, vom însemna cu a valoarea constantă a acceleraţiei:

$$a=\frac{dv}{dt}$$

de unde:

$$\int dv = a \int dt$$

sau, integrând:

$$v = at + v_0$$

unde v_0 este constanta de integrare. Avem, mai departe:

$$v = \frac{ds}{dt} = at + v_0$$

de unde:

$$\int ds = \int (at + v_0)\, dt$$

sau:

$$s = a \int t.dt + v_0 \int dt$$

și, integrând:

$$s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0 \qquad (8)$$

s_0 fiind constanta de integrare. Aceasta e formula generală a mișcării uniform variate. Timpul nu e socotit aici chiar dela începutul mișcării, ci mai târziu, când mobilul se află în plină mișcare. In momentul când observatorul dă drumul cronometrului, pentru a studia mișcarea, mobilul are iuțeala v_0 și se află la depărtarea s_0 de origina spațiilor.

Dacă însemnăm cu alte litere constantele din formula (8):

$$\frac{a}{2} = A \quad , \quad v_0 = B \quad , \quad s_0 = C$$

obținem:

$$s = At^2 + Bt + C,$$

care reprezintă forma cea mai generală a legii mișcării uniform variate. Am lucrat cu această relație la cap. XVI.

CAPITOLUL VI

CALCULAREA SUPRAFEȚELOR PRIN INTEGRARE

După cum știm, prin integrare putem trece dela o derivată dată la funcțiunea inițială. Vom vorbi acum despre un alt folos al integrării: acela de a calcula mărimea suprafețelor. In adevăr, calculul integral ne dă putința să evaluăm suprafața cuprinsă între axa x-lor și o curbă oarecare, cu condiția să cunoaștem *ecuația* acelei curbe. Bunăoară, să considerăm curba AB, raportată la cele două axe de coordonate, x și y. Suprafața hașurată din fig. 3 se poate determina cu ajutorul calculului integral. Iată principiul pe care se bazează această operație.

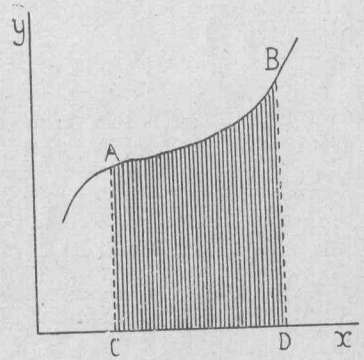


Fig. 3

Să presupunem că vrem să evaluăm suprafața cuprinsă între dreapta OA (fig. 4) și axa absciselor. Se vede bine că această suprafață reprezintă un triunghiu. Admitem că nu cunoaștem formula după care se calculează suprafața triunghiului; cunoaștem numai modul simplu în care se socotește suprafața dreptunghiului.

Vom împărți triunghiul dat într'un număr infinit de mare de dreptunghiuri, ce au ca bază lungimea dx iar

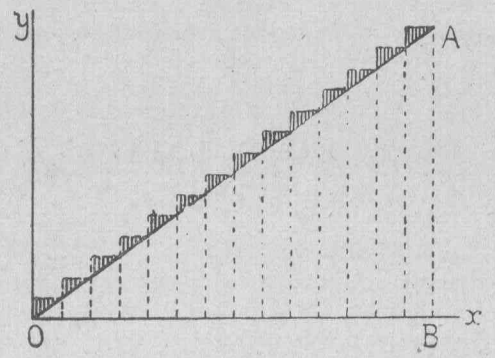


Fig. 4

ca înălțime ordonatele respective y. Suprafața fiecărui dreptunghiu elementar este:

$$\text{înălțimea} \times \text{baza} = y.dx.$$

Insemnăm cu S suprafața triunghiului OBA; suprafața fiecărui dreptunghiu elementar fiind o cantitate infinit mică din S, o putem reprezenta prin dS. Avem deci:

$$dS = y.dx. \qquad (1)$$

Dacă însumăm la un loc toate suprafețele elementare dS, obținem întreaga suprafață S a triunghiului; porțiunile haşurate, situate deasupra dreptei OA, sunt complet neglijabile. In adevăr, se poate verifica prin desen că aceste porțiuni devin din ce în ce mai mici, cu cât baza dreptunghiurilor este mai mică. Pentru o bază extrem de mică, părțile haşurate se reduc la grosimea practică a

dreptei OA; pentru o bază infinit mică, ele dispar cu totul.

Așa dar, prin însumarea valorilor infinit mici dS, trecem dela diferențiala dS la mărimea finită S. Noi știm însă că, trecerea dela o diferențială, cum este dy, la mărimea finită respectivă y, reprezintă însăşi operația de «*integrare*». Deducem astfel că, *integrarea nu este altceva decât o însumare de elemente infinit mici, în număr infinit mare.*

Formula (1) este generală: cu ea putem să calculăm aria oricărei suprafețe cuprinsă între axa x-ilor şi o curbă oarecare. Căci fiecare suprafață dată se poate descompune într'un număr infinit mare de dreptunghiuri elementare, cu baza dx şi de înălțime variabilă y. Suprafața dS a fiecărui dreptunghiu elementar este dată de relația $y.dx$ iar suprafața totală S a figurii date se obține prin integrarea formulei (1):

$$\int dS = \int y.dx$$

de unde:

$$S = \int y.dx. \qquad (2)$$

Se vede din figura 4 că mărimea y variază dela un dreptunghiu elementar la altul: y este funcțiune de x. Legătura matematică dintre aceste două mărimi ne este dată de *ecuația curbei*. In exemplul nostru, este vorba de ecuația dreptei OA.

Ce însemnează ecuația unei curbe? O curbă nu reprezintă altceva decât o multitudine de puncte, ce se înşirue într'un mod anumit. Fiecare punct al curbei este determinat de două mărimi: abscisa x şi ordonata y, iar aceste mărimi variază, în general, dela un punct la altul. Cu alte cuvinte, o curbă se definește printr'o serie de mărimi: x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3... corespunzătoare tuturor punc-

telor sale. Intre ordonatele y și abscisele x ale tuturor punctelor de pe curbă există o legătură matematică, numită *ecuația curbei*. Pentru a stabili ecuația unei curbe, trebue să cercetăm modul cum se succed ordonatele y, pentru diferitele abscise x.

De pildă, să stabilim ecuația dreptei din exemplul de mai sus. E vorba de o dreaptă care trece prin origina coordonatelor. Considerăm trei puncte oarecare, A, C, E (fig. 5), definite prin coordonatele indicate sub fig. 5.

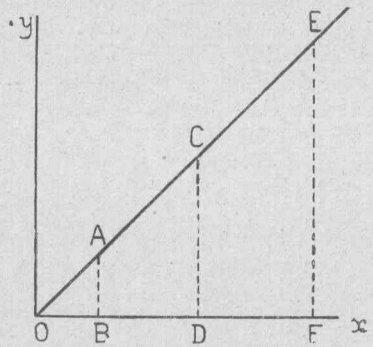


Fig. 5

Punctul A { ordonată $AB=y_1$; abscisă $OB=x_1$

Punctul B { ordonată $CD=y_2$; abscisă $OD=x_2$

Punctul C { ordonată $EF=y_3$; abscisă $OF=x_3$

Observăm că fiecare ordonată determină cu abscisa corespunzătoare și cu dreapta dată, un triunghiu. Bunăoară, ordonata $AB=y_1$, abscisa $OB=x_1$ și porțiunea OA de pe dreaptă, determină triunghiul ABO. De asemenea, ordonata $CD=y_2$, abscisa $OD=x_2$ și porțiunea OC de pe dreaptă determină triunghiul CDO, ș. a. m. d. Toate aceste triunghiuri sunt asemenea între ele, așa că au laturile proporționale:

$$\frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OD}=\frac{EF}{OF}$$

sau:

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=a$$

unde am însemnat cu a valoarea comună a acestor rapoarte. Mărimea a reprezintă deci câtul ce rezultă din împărțirea cantităților y_1, y_2, $y_3\ldots$, prin cantitățile respective: x_1, x_2, $x_3\ldots$, Din formula de mai sus, scoatem:

$$y_1=ax_1$$

$$y_2=ax_2$$

$$y_3=ax_3$$

sau, în general, însemnând cu y ordonata și cu x abscisa corespunzătoare, avem:

$$y=ax. \qquad (3)$$

Iată ecuația dreptei considerate! Dând lui x diverse valori: x_1, $x_2\ldots$, ecuația (3) ne îngăduie să calculăm valorile corespunzătoare: y_1, y_2, $y_3\ldots$, ce determină diversele puncte ale dreptei OA.

Având ecuația dreptei OA, putem să calculăm prin formula (2) suprafața S a triunghiului ABO. In adevăr, să introducem în (2) valoarea lui y din (3):

$$S=\int y.dx=\int ax.dx$$

și cum a este un factor constant, îl putem scoate înafara integralei:

$$S=a\int x.dx=a.\frac{x^2}{2}. \qquad (4)$$

Constanta de integrare este aici nulă, căci pentru $x=0$, nu avem nicio suprafață, $S=0$. Dacă în această relație introducem ecuația dreptei: $y=ax$, obținem:

$$S=\frac{ax\times x}{2}=\frac{yx}{2}$$

care nu este decât formula cunoscută din geometrie: suprafața triunghiului este egală cu jumătatea produsului dintre bază și înălțime.

Se înțelege, că, pentru triunghiul ABO, formula se scrie:

$$S_{ABO} = \frac{y_1 x_1}{2} = \frac{a x_1^2}{2}$$

pentru triunghiul CDO, avem:

$$S_{CDO} = \frac{y_2 x_2}{2} = \frac{a x_2^2}{2} \qquad (4\,a)$$

și așa mai departe.

Trecem acum la un caz ceva mai complicat: să determinăm o porțiune din suprafața triunghiului precedent, anume aria trapezului $ABCD$ (fig. 6).

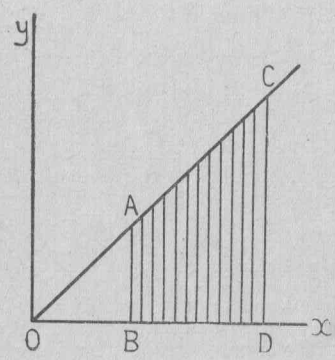


Fig. 6

Avem:

$AB = y_1$ $\quad CD = y_2$

$OB = x_1$ $\quad OD = x_2$

$BD = OD - OB = x_2 - x_1$

Știm din Geometrie că suprafața trapezului este egală cu semi-suma bazelor, înmulțită cu înălțimea. In cazul de față, baza mică este y_1, baza mare este y_2 iar înălțimea este $BD = x_2 - x_1$.

Deci:

$$S = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)}{2} \qquad (5)$$

Aceasta este expresiunea suprafeței trapezului $ABCD$, cu notațiile noastre. Să stabilim această formulă cu ajutorul calculului integral.

Considerăm relația generală:

$$S = \int y\,.\,dx$$

și ecuația dreptei AC:

$$y = ax.$$

Combinând ambele formule, obținem:

$$S = \int ax\,.\,dx$$

adică aceeași formulă ca (4), Intervine însă acum o condiție principială: x nu trebue să varieze aici decât dela x_1 la x_2, adică dela punctul B la punctul D. Să specificăm această condiție chiar în formulă: vom scrie limitele de integrare alăturea de semnul $\int$: limita superioară se scrie sus, cea inferioară jos:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ax\,.\,dx$$

și se citește: *integrală dela ics unu la ics doi, a lui ax.dx.*

Dăm constanta a în afara integralei:

$$S = a \int_{x_1}^{x_2} x\,.\,dx.$$

Firește, va trebui să ținem seamă de aceste limite de integrare și în rezultatul final. Matematicienii scriu rezultatul integrării între paranteze, alăturând și limitele de

integrare, la fel ca mai sus. Pentru integrala precedentă, avem:

$$S = a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x} \tag{6}$$

Acum vine operația de cea mai mare însemnătate: cum ținem seamă, în această relație, de valorile x_1 și x_2? Cum trebue să interpretăm formula cabalistică (6)?

Vedem pe figură că suprafața trapezului $ABCD$ se deduce din suprafața triunghiului CDO, scoțând triunghiul ABO. Adică:

$$S = \text{supr. tr. } CDO - \text{supr. tr. } ABO. \tag{7}$$

Am stabilit mai sus suprafețele acestor triunghiuri, în formulele (4 a); introducem în (7) aceste formule și obținem:

$$S = a\left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}\right]. \tag{8}$$

Formulele (6) și (8) exprimă suprafața S a aceleași figuri geometrice, trapezul $ABCD$. Egalându-le, avem:

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}.$$

Această formulă ne conduce la rezultatul general că: *soluția unei integrale, prevăzută cu indici, trebue pusă sub forma unei diferențe de doi termeni: primul termen reprezintă rezultatul integrării obișnuite, în care variabila a fost înlocuită prin limita ei superioară, iar termenul al doilea reprezintă aceeași expresiune, în care variabila a fost înlocuită prin limita ei inferioară.*

Așa dar:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} ax\,.\,dx = \frac{ax_2^2}{2} - \frac{ax_1^2}{2}.$$

Să dovedim că rezultatul găsit corespunde realității adică este identic cu (5). In formula obținută, dăm pe a factor comun:

$$S = \frac{a\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2}$$

Termenul $x_2^2 - x_1^2$ fiind diferența a două patrate, este egal cu produs de sumă prin diferență:

$$S = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2}$$

și, introducând pe a în prima paranteză:

$$S = \frac{(ax_2 + ax_1)(x_2 - x_1)}{2}.$$

Dar din ecuația (3) a dreptei OC, avem: $y_1 = ax_1$ și $y_2 = ax_2$. Introducând pe y_1 și y_2 în formula de mai sus, obținem:

$$S = \frac{(y_1 + y_2)(x_2 - x_2)}{2}$$

care este tocmai formula (5). Am regăsit astfel, cu ajutorul calculului integral, formula suprafeței trapezului, așa cum o stabilește Geometria.

Integralele prevăzute cu indici, ca în exemplul de mai sus, se numesc *integrale definite*. Toate celelalte integrale, cu care am lucrat până acum, sunt *integrale nedefinite*. Să rezumăm într'o formulă regula indicată mai sus, pentru calcularea integralei definite.

Fie $f(x)$ o funcțiune, a cărei derivată este $F(x)$; dacă în expresiunea funcțiunii înlocuim pe x cu a, obținem o altă expresiune, ce o reprezentăm prin $f(a)$; în mod

analog, dacă înlocuim pe x prin b, ceea ce obținem însemnăm cu $f(b)$.

Trecerea dela derivata $F(x)$ la funcțiunea $f(x)$ se face, după cum știm, printr'o *integrală nedefinită:*

$$\int F(x)\,dx = f(x) + \text{constanta.}$$

Când integrarea trebue făcută între limitele a și b, avem atunci o *integrală definită:*

$$\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

PROBLEME

Să se calculeze integralele definite:

1. $\int_o^r 2\pi\, x\,dx.$

2. $\int_o^r 4\pi\, x^2\,dx.$

3. $\int_o^{x_1} \frac{a}{x+b}\,dx.$

CAPITOLUL VII

ȘI O EXCURSIE PRIN MELEAGURILE FIZICEI

Dacă Fizica a ajuns astăzi la o desvoltare ce nu putea fi nici măcar bănuită în trecut, aceasta se datorește în primul rând aportului matematic. Calculul diferențial și integral formează o rețea strânsă, în ochiurile căreia se prind cele mai subtile considerațiuni fizice. Aproape că

nu există chestiune de fizică, în care să nu intervină, fie o derivată, fie o integrală. De aceea, fizicianul care se respectă trebue să îndrăgească bine lumea simbolurilor matematice, să nu se mulțumească numai cu învârtirea șuruburilor la aparate și trasarea pedantă a curbelor. Vom expune, în cele ce urmează, două probleme de fizică, alese dintre cele mai fundamentale și a căror tratare pune la contribuție noțiuni de calcul integral.

Lucrarea forțelor. Iată una din noțiunile cele mai însemnate din Fizică, deoarece prin ea se ajunge la noțiunea de «*energie*», care stăpânește astăzi toată știința. Prin definiție, *o forță lucrează sau săvârșește o lucrare, atunci când își deplasează punctul de aplicație.* Valoarea L a lucrării este dată de produsul dintre intensitatea F a forței și deplasarea l a punctului de aplicație, pe direcția forței:

$$L = F \times l \qquad (1)$$

Această formulă presupune că forța își păstrează aceeași intensitate F pe tot parcursul drumului l. Dar cazul acesta se întâlnește numai rareori în Fizică; în mod frecvent, forța își variază intensitatea dealungul drumului l, după o lege anumită. In asemenea cazuri, expresiunea lucrării L se obține cu ajutorul calculului integral.

In adevăr, să considerăm drumul l împărțit într'o infinitate de segmente infinit mici, dl. Putem admite că pe distanța infinit mică dl, intensitatea forței rămâne practic constantă. Lucrarea săvârșită de forța constantă F, pe această porțiune infinit mică de drum, este infinit mică, așa că o putem reprezenta prin diferențiala dL:

$$dL = F.dl.$$

Lucrarea totală L, săvârșită dealungul drumului l va fi, astfel, suma tuturor lucrărilor elementare. A însuma aceste lucrări infinit mici înseamnă a trece dela dife-

renţiala dL la mărimea finită L, ceea ce revine la a face o integrare. Adică:

$$L = \int F.dl. \qquad (2)$$

Este formula fundamentală cu care se calculează lucrarea forţei F, dealungul drumului l, când forţa F variază în mod continuu pe acest drum. Pentru a integra expresiunea (2) trebue să cunoaştem relaţia dintre F şi l, adică legea după care variază forţa F cu distanţa.

Exemplu. Luăm o masă electrică punctuală $+E$; ea produce în spaţiul înconjurător un *câmp de forţă*, care slăbeşte în mod continuu, cu cât ne depărtăm de masa E. La o depărtare r de masa E să aducem o altă masă electrică punctuală, $+e$. Asupra acestei mase se exercită o forţă de respingere F, a cărei mărime este dată de legea lui Coulomb:

$$F = \frac{Ee}{Kr^2}$$

unde K este *constanta dielectrică* a mediului înconjurător. Dacă presupunem că în jurul sarcinilor electrice E şi e nu se află de loc materie, ci este vid desăvârşit, atunci $K=1$:

$$F = \frac{Ee}{r^2}. \qquad (3)$$

Considerăm masa E fixă în spaţiu; numai masa e se poate mişca cu uşurinţă. Forţa de respingere F va pune în mişcare această masă, îndepărtând-o cât mai mult de masa E. Putem considera punctul de aplicaţie al forţei F

ca solidar cu masa e: când această masă se mişcă, forţa F îşi deplasează punctul de aplicaţie, adică săvârşeşte o lucrare. Dacă forţa îşi deplasează punctul de aplicaţie pe distanţa infinit mică dl, atunci depărtarea r dintre cele două mase electrice creşte cu dr şi avem evident:

$$dl = dr. \qquad (4)$$

Lucrarea totală L, produsă de forţa F, când deplasează masa electrică e, pe distanţa finită l, se calculează cu formula generală (2), ţinând seamă de (3) şi (4). Adică, înlocuim în (2) valoarea lui F din (3) şi scriem în locul lui dl pe dr, aşa cum cere formula (4):

$$L = \int \frac{Ee}{r^2}\, dr$$

E şi e fiind constante, le putem scoate înafara integralei:

$$L = Ee \int \frac{dr}{r^2} = Ee \int r^{-2} dr. \qquad (5)$$

Această însumare trebue făcută numai pentru lungimea l a drumului; cum specificăm în formulă acest fapt? Il specificăm alăturând integralei limitele care definesc drumul l. Cu modul acesta, integrala noastră devine o *integrală definită*. Limitele drumului l sunt extremităţile A şi B (fig. 7), definite prin depărtarea lor de masa elec-

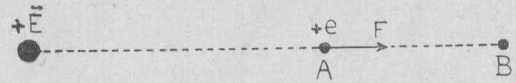


Fig. 7

trică E. Am însemnat cu r depărtarea iniţială a masei e de masa E, adică depărtarea de E a punctului A; fie r_1

depărtarea corespunzătoare punctului B. Insumarea (5) trebue, aşa dar, condusă dela r la r_1; acestea sunt limitele de integrare:

$$L = Ee \int_r^{r_1} r^{-2}\, dr.$$

Să rezolvăm această integrală. Expresiunea de integrat este de forma $\int x^m\, dx$, unde $m = -2$. După cum ştim, soluţia este de forma $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, deci:

$$L = Ee\left(\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right)_r^{r_1} = Ee\left(\frac{r^{-1}}{-1}\right)_r^{r_1}$$

sau:

$$L = Ee\left(-\frac{1}{r}\right)_r^{r_1}$$

Cunoaştem din capitolul precedent cum se scrie soluţia unei integrale definite; aplicând aici regula enunţată, avem:

$$L = Ee\left[\left(-\frac{1}{r_1}\right) - \left(-\frac{1}{r}\right)\right].$$

Sau, ţinând seamă de elementara regulă a semnelor:

$$L = Ee\left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r}\right),$$

formulă, care se mai poate scrie:

$$L = e\left(\frac{E}{r} - \frac{E}{r_1}\right).$$

Punem:

$$V = \frac{E}{r} \quad \text{şi} \quad V_1 = \frac{E}{r_1}$$

atunci expresiunea lucrării devine:

$$L = e(V - V_1). \tag{6}$$

Mărimea V a primit numele de *potenţial electric* al punctului A, iar V_1 *potenţial electric* al punctului B. Formula (6) exprimă, aşa dar, că *lucrarea săvârşită de o masă electrică e, când se deplasează într'un câmp electric dela potenţialul V la potenţialul V_1 este dată de produsul dintre masa electrică şi diferenţa de potenţial.*

Lucrarea săvârşită de un gaz care se destinde. Considerăm un gaz aflat într'un corp de pompă, prevăzut cu piston

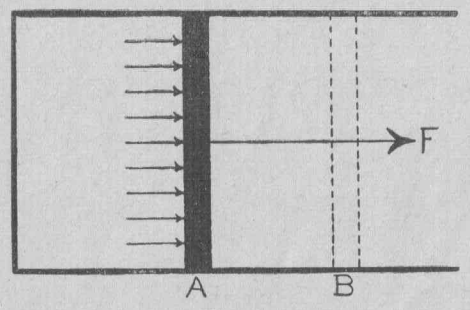


Fig. 8

(fig. 8). Gazul are o presiune de p atmosfere: aceasta însemnează că pe fiecare unitate de suprafaţă a peretelui se exercită o forţă de intensitate p. Fie S suprafaţa pistonului: dacă pe unitatea de suprafaţă a pistonului se exercită forţa p, atunci pe S unităţi de suprafaţă se exercită Sp forţe. Putem considera acţiunea acestor forţe ca fiind

echivalentă cu acțiunea unei singure forțe F — *rezultanta* — ce are punctul de aplicație fixat pe piston:

$$F = Sp.$$

Dacă pistonul este liber, sub acțiunea forței F e se va mișca din poziția A în poziția B, străbătând drumul $AB = l$. Forța rezultantă F își deplasează și ea punctul de aplicație, odată cu pistonul, săvârșind astfel o lucrare, ce poate fi folosită în diverse scopuri. Ne propunem să calculăm lucrarea căpătată prin această expansiune a gazului.

Dacă presiunea p rămâne constantă, când pistonul se deplasează din A și B, lucrarea se calculează imediat. In adevăr, dacă p este constant, atunci și $F = Sp$ este constant. Și deci, lucrarea L produsă de forța constantă F, care își deplasează punctul de aplicație pe propria ei direcțiune, pe lungimea l, este, potrivit relației (1):

$$L = F \times l = pSl. \tag{7}$$

Produsul Sl exprimă volumul cuprins între poziția A și poziția B a pistonului, căci S este suprafața bazei iar l înălțimea porțiunei AB a corpului de pompă. Insemnăm cu v_1 volumul ocupat de gaz, când pistonul se află în poziția A și cu v_2 volumul gazului pentru poziția B a pistonului. Avem:

$$v_1 + Sl = v_2$$

de unde:

$$v_2 - v_1 = Sl.$$

Să introducem în (7) această valoare a lui Sl:

$$L = p(v_2 - v_1). \tag{8}$$

Această formulă ne spune că: *lucrarea săvârșită de un gaz, care se destinde isobar (adică sub presiune constantă)*

este dată de produsul dintre presiunea gazului și variația lui de volum.

Formula (8) se aplică rar în Fizică, destinderea isobară a gazelor ne fiind un fenomen prea obișnuit. Se poate înfăptui, de pildă, luând corpul de pompă cu pistonul în echilibru (pentru aceasta pistonul trebue să apese și el asupra gazului cu o presiune p), și încălzind gazul. Dilatarea gazului se face atunci sub presiune constantă.

Dar în cele mai multe considerațiuni fizice întâlnim destinderea gazelor cu variație de presiune: presiunea gazului se micșorează în mod continuu, dela începutul până la sfârșitul operațiunii. Când gazul își începe expansiunea, el are presiunea p_1, deci forța care solicită pistonul este $F_1 = Sp_1$; la sfârșitul expansiunii, gazul are o presiune mai mică p, așa că forța care acționează asupra pistonului este $F_2 = Sp_2$. Din cauza variației continui a forței F, pe drumul l de expansiune al gazului, lucrarea L nu se mai poate calcula direct, prin operațiuni aritmetice simple, ci trebue chemat în ajutor calculul integral.

Anume, în locul expansiunii complete a gazului, din poziția A în poziția B a pistonului, să considerăm mai întâi o expansiune infinit mică, în decursul căreia presiunea p să rămână practic constantă. Pistonul se va deplasa atunci în corpul de pompă pe o distanță infinit mică dl; forța F, care solicită pistonul, săvârșește o lucrare infinit mică dL. Fiind în condițiunile cerute de formula (1), putem scrie:

$$dL = F \,.\, dl.$$

Lucrarea totală L, produsă pe întregul drum l al pistonului, se obține prin integrarea formulei de mai sus:

$$L = \int F \,.\, dl$$

sau, știind că $F = pS$:

$$L = \int pS.dl. \tag{9}$$

Produsul $S.dl$ reprezintă creșterea infinit mică dv a volumului gazului:

$$S.dl = dv.$$

Introducem această relație în (9):

$$L = \int p.dv. \tag{10}$$

Este formula fundamentală, care ne dă lucrarea L săvârșită de un gaz ce se destinde cu variație de presiune.

Ca să integrăm această formulă, trebue să cunoaștem relația dintre p și v, adică să știm legea după care variază presiunea p a gazului în raport cu volumul lui. Această lege este cuprinsă în *formula gazelor perfecte:*

$$pv = RT \tag{11}$$

unde p este presiunea gazului, v volumul ocupat, R constanta gazelor iar T temperatura absolută (=temperatura centigradă plus 273). Din (11) scoatem:

$$p = \frac{RT}{v}$$

și introducem această valoare a lui p în (10):

$$L = \int \frac{RT}{v}\, dv.$$

Să admitem că, în timpul destinderii, gazul nu-și variază temperatura, deci considerăm o *destindere izotermă:* T = constant. Să scoatem de sub semnul de integrare, cele două constante R și T:

$$L = RT \int \frac{dv}{v}.$$

Gazul se destinde din poziția A a pistonului până în poziția B, adică el trece dela volumul v_1 la volumul v_2. Integrala precedentă trebue, așa dar, calculată numai între aceste limite, adică ea trebue să fie o *integrală definită:*

$$L = RT \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v}.$$

Avem acum toate elementele pentru calcularea integralei. Observăm că integrala noastră este de forma $\int \frac{dx}{x}$, a cărei soluție știm că este $\log x + \text{const}$. Fiind vorba de o integrală definită, soluția se va scrie:

$$L = RT \left(\log v\right)_{v_1}^{v_2}$$

sau:

$$L = RT\,(\log v_2 - \log v_1).$$

Știm însă că diferența a doi logaritmi este egală cu logaritmul raportului mărimilor respective:

$$L = RT \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Am obținut astfel formula cu care putem să calculăm lucrarea L săvârșită de un gaz ce se destinde izoterm, dela volumul v_1 la volumul v_2, presiunea variind în mod continuu dela p_1 la p_2. Logaritmul cuprins în

această formulă este logaritm neperian, dar calculele numerice se fac cu logaritmi zecimali. Am vorbit la cap. XII de transformarea logaritmilor neperieni în zecimali; pe baza celor spuse acolo, putem scrie:

$$L = 2{,}303\ RT\ \log_{10} \frac{v_2}{v_1}$$

unde $\log_{10}$ reprezintă logaritmul zecimal.

In locul volumelor v_1 și v_2 putem introduce presiunile respective, p_1 și p_2, știind că, după legea gazelor perfecte, presiunile sunt invers proporționale cu volumele:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Inlocuind deci, în formula precedentă, raportul $\frac{v_2}{v_1}$ prin $\frac{p_1}{p_2}$, avem:

$$L = 2{,}303\ RT\ \log_{10} \frac{p_2}{p_1}$$

formulă foarte mult întrebuințată în Chimia-Fizică.

PARTEA III

DESLEGAREA PROBLEMELOR

Băgați de seamă! Problemele date la sfârșitul capitolelor precedente sunt deslegate aici în mod complet, cu toate amănuntele, ca să fie înțelese cu ușurință de orișicine. Dacă nu pricepeți mersul calculului pentru o problemă, însemnează că nu stăpâniți destul de bine teoria expusă la capitolul respectiv. In consecință, recitiți capitolul buclucaș cu mai multă atențiune.

CALCULUL DIFERENȚIAL

CAPITOLUL I

1. *De cine este funcțiune suprafața cercului?*

Știm din Geometrie că suprafața S a cercului este dată de formula:

$$S = \pi r^2$$

unde $\pi = 3{,}14$ (raportul constant ce există între lungimea circonferinței și diametrul respectiv). In membrul II al acestei relațiuni, singura mărime ce se poate varia după voie este raza r, căci π este o constantă. Deci suprafața cercului este funcțiune de rază:

$$S = f(r).$$

2. *De cine este funcțiune volumul cilindrului?*

Volumul cilindrului se calculează după formula cunoscută:

$$V = \pi r^2 l$$

unde r este raza cercului de bază iar I înălțimea; π este constanta cunoscută $=3{,}14$. Putem varia după voie, atât raza r cât și înălțimea I; adică volumul cilindrului este funcțiune de două variabile independente: r și I. Vom scrie deci:

$$V = f(r, I).$$

3. *De cine este funcțiune suprafața trapezului?* Suprafața trapezului este dată de formula:

$$S = \frac{B + b}{2} \times I$$

unde B = baza mare, b = baza mică, I = înălțimea. Toți acești trei factori pot fi variați după voie, obținând de fiecare dată alt trapez, cu o altă suprafață S. Deci, suprafața trapezului este funcțiune de trei variabile independente, B, b și I:

$$S = f(B, b, I).$$

CAPITOLUL III

1. $y = 2x^2 + 1$.

Ca să stabilim relația dintre creșterea Δy a funcțiunii și creșterea Δx a variabilei, procedăm în modul cunoscut. Dăm lui x o creștere Δx, ceea ce înseamnează ca în formula dată să înlocuim pe x cu $x+\Delta x$. Datorită acestei schimbări de valoare a variabilei, valoarea lui y se schimbă și ea: însemnăm cu Δy creșterea ce o suferă, din această cauză, mărimea y. Adică, va trebui să înlocuim în formula dată pe y prin $y + \Delta y$. Avem astfel:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 1.$$

Desvoltăm patratul binomului din membrul II:

$$y + \Delta y = 2[x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2] + 1$$

desfacem parantezele:

$$y + \Delta y = 2x^2 + 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1.$$

Scădem acum funcțiunea inițială:

$$y + \Delta y - y = [2x^2 + 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1] - (2x^2 + 1).$$

In membrul I se reduce y și ne rămâne numai Δy; în membrul II se reduce termenul $2x^2$, cum și 1. Obținem, așa dar:

$$\Delta y = 4x.\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

2. $y = x^2 + x + 4$.

Același mod de calcul, ca mai sus: dăm lui x creșterea Δx, adică x ia acum valoarea $x+\Delta x$. In consecință, y crește cu Δy, luând valoarea $y + \Delta y$. Să introducem aceste creșteri în formula dată:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 4.$$

Desvoltăm patratul din membrul II și înlăturăm parantezele:

$$y + \Delta y = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x + 4.$$

Scădem funcțiunea inițială:

$$y + \Delta y - y = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x + 4 - (x^2 + x + 4)$$

și reducând termenii asemenea obținem:

$$\Delta y = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x,$$

care este rezultatul căutat.

3. $y = \frac{3}{x}$.

Procedăm în acelaşi fel: când x creşte cu Δx, funcţiunea y primeşte o creştere Δy:

$$y + \Delta y = \frac{3}{x + \Delta x.}$$

Scădem funcţiunea iniţială:

$$y + \Delta y - y = \frac{3}{x + \Delta x} - \frac{3}{x}.$$

Ca să facem scăderea în membrul II, aducem fracţiunile la acelaşi numitor. In acest scop, înmulţim ambii termeni ai fracţiunii întâia cu numitorul fracţiunii a doua şi ambii termeni ai fracţiunii a doua cu numitorul fracţiunii întâia:

$$\Delta y = \frac{3x}{(x + \Delta x)x} - \frac{3(x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x.}$$

Făcând acum scăderea, se reduce $3x$ dela numărător şi rămâne:

$$\Delta y = - \frac{3.\Delta x}{x(x + \Delta x).}$$

CAPITOLUL IV

1. $y = x^3$.

Considerăm mai întâi creşteri finite: când x creşte cu Δx, funcţiunea y creşte cu Δy şi avem:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3.$$

Observăm că în membrul II avem cubul unui binom; cunoaştem din algebră desvoltarea binomului:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Tot astfel se desvoltă şi binomul nostru:

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Scădem funcţiunea iniţială:

$$y + \Delta y - y = x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3.$$

In membrul I se reduce y iar în membrul II se reduce x^3. Ne rămâne:

$$\Delta y = 3x^2.\Delta x + 3x\,(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

obţinând astfel formula căutată.

Să considerăm acum creşteri infinit mici; ele se reprezintă prin simbolurile dy şi dx. Vom înlocui, deci, în formula precedentă, pe Δy cu dy şi pe Δx cu dx:

$$dy = 3x^2.dx + 3x\,(dx)^2 + (dx)^3.$$

Cunoscând proprietăţile cantităţilor infinit mici, putem să lepădăm toţi termenii din această formulă, cari cuprind un infinit mic la puterea a 2-a, a 3-a, etc. Ne rămâne atunci numai:

$$dy = 3x^2.dx.$$

2. $y = \frac{a}{x^2}$, unde a este o constantă.

Dăm lui x o creştere finită Δx, ceea ce face ca y să capete creşterea Δy:

$$y + \Delta y = \frac{a}{(x + \Delta x)^2.}$$

Scădem funcțiunea inițială:

$$y + \Delta y - y = \frac{a}{(x + \Delta x)^2} - \frac{a}{x^2}.$$

In membrul I se reduce y; în membrul II aducem fracțiunile la același numitor, pentru a face scăderea:

$$\Delta y = \frac{ax^2}{(x + \Delta x)^2 x^2} - \frac{a(x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 x^2}$$

Desvoltăm patratul binomului dela numărător:

$$\Delta y = \frac{ax^2 - a[x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2]}{(x + \Delta x)^2 x^2}.$$

Facem scăderea la numărător, ținând seama de faptul că semnul — dinaintea parantezei schimbă toate semnele + din cuprinsul ei, transformându-le în —. Termenul $+ax^2$ se reduce cu $-ax^2$, așa că ne rămâne:

$$\Delta y = \frac{-2xa\,\Delta x - a(\Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 x^2}$$

care este formula căutată.

Să considerăm acum creșteri infinit mici; formula de mai sus se scrie:

$$dy = \frac{-2ax\,dx - a(dx)^2}{(x + dx)^2 x^2}$$

Lepădăm termenii în cari infinitul mic dx este la o putere superioară, cum este, de pildă, termenul $a(dx)^2$. De asemenea, la numitor, dx este neglijabil față de x; ne rămâne, așa dar:

$$dy = -\frac{2ax\,dx}{x^2 x^2}$$

și reducând pe x dela numărător cu un x dela numitor, obținem:

$$dy = -\frac{2a\,dx}{x^3}.$$

3. $y = (x+4)^2$.

Să desvoltăm binomul din membrul II:

$$y = x^2 + 8x + 16.$$

Dăm lui x o creștere finită Δx, ceea ce face ca y să primească o creștere Δy:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 8(x + \Delta x) + 16.$$

Desvoltăm patratul binomului:

$$y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 8x + 8\Delta x + 16.$$

Scădem funcțiunea inițială:

$$y + \Delta y - y = x^2 + 2x\,.\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 8x + 8\Delta x + 16 - x^2 - 8x - 16.$$

Reducem termenii asemenea și ne rămâne:

$$\Delta y = 2x\Delta x + 8\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Considerăm acum creșterile infinit mici: în consecință lepădăm termenul $(dx)^2$, care nu influențează rezultatul final și obținem:

$$dy = 2x\,dx + 8\,dx.$$

CAPITOLUL VI

1. $y = x^{20}$.

Această funcțiune este de forma generală $y = x^n$, unde $n = 20$. Știm că, în acest caz, derivata este: $y' = nx^{n-1}$. Inlocuind aici pe n prin 20, obținem:

$$y' = 20 \times x^{20-1} = 20x^{19}.$$

2. $y=\sqrt[5]{x}$.

Punem acest radical sub forma de exponent fracționar:

$$y=x^{\frac{1}{5}}$$

In felul acesta, am adus funcțiunea dată la forma $y=x^n$, unde $n=\frac{1}{5}$ Derivata se scrie:

$$y'=nx^{n-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}.$$

Observăm apariția unui exponent negativ; după cele știute, putem scrie:

$$x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$$

așa că, derivata este:

$$y'=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}.$$

3. $y=\frac{1}{x^6}$.

După cum se vede, membrul II al acestei relațiuni cuprinde la numărător unitatea, iar la numitor variabila x, dotată cu un exponent. Putem deci să reprezentăm această relațiune sub forma de exponent negativ:

$$y=x^{-6}.$$

In felul acesta, am adus relația dată la forma: $y=x^n$, a cărei derivată se scrie imediat: $y'=nx^{n-1}$, unde $n=-6$:

$$y'=(-6)\times x^{-6-1}=-6x^{-7}$$

sau încă, transformând exponentul negativ în fracțiune:

$$y=-\frac{6}{x^7}.$$

4. $y=\sqrt[3]{x^4}$.

Scriem radicalul sub forma de exponent fracționar:

$$y=x^{\frac{4}{3}}$$

funcțiunea dată este acum de forma $y=x^n$, unde $n=\frac{4}{3}$ Deci derivata este:

$$y'=nx^{n-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

care se mai poate scrie:

$$y'=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$

CAPITOLUL VII

1. $y=2x^7$.

Această funcțiune este de forma $y=ax^n$, unde $a=2$ și $n=7$. Am văzut că, pentru acest caz, expresiunea derivatei este: $y'=nax^{n-1}$. Inlocuind în această formulă pe a prin 2 și pe n prin 7, obținem:

$$y'=2\times 7\times x^{7-1}=14x^6.$$

2. $y=\frac{5}{2}\sqrt[3]{x^6}$.

Punem radicalul sub forma de exponent fracționar:

$$y=\frac{5}{2}x^{\frac{6}{3}}=\frac{5}{2}x^2.$$

Funcțiunea dată este acum de forma $y = ax^n$, unde $a = \frac{5}{2}$ și $n = 2$. Derivata se scrie, deci:

$$y' = nax^{n-1} = 2 \times \frac{5}{2} \times x^{2-1} = 5x.$$

3. $y = 8x^3 + 1$.

Derivata acestei funcțiuni este dată numai de primul termen $8x^3$, căci cellalt termen, 1, fiind o constantă, nu contribue la rezultat. Avem deci:

$$y' = 3 \times 8 \times x^{3-1} = 24x^2.$$

4. $y = \frac{9x^3 - 4}{3}$.

Mai putem scrie această expresiune și astfel:

$$y = \frac{9x^3}{3} - \frac{4}{3} = 3x^3 - \frac{4}{3}$$

Știind că termenul ultim din membrul II este o constantă, deci el nu intervine cu nimic în expresiunea derivatei, avem:

$$y' = 3 \times 3x^{3-1} = 9x^2.$$

CAPITOLUL VIII

1. $y = ax^2 + bx + c$.

Calculăm derivata fiecărui termen în parte:

derivata lui $+ ax^2$ este $+ 2ax$
» » $+ bx$ » $+ b$
» » $+ c$ » zero.

Derivata funcțiunii date este suma acestor derivate:

$$y' = 2ax + b.$$

2. $y = 3ax^2 - x^{-2}$.

Procedăm ca în exemplul precedent, luând derivata fiecărui termen în parte:

derivata lui $+ 3ax^2$ este..... $2 \times 3ax^{2-1} = 6ax$
» » $- x^{-2}$ » .....$-(-2)x^{-2-1} = +2x^{-3}$

Facem suma:

$$y' = 6ax + 2x^{-3}.$$

3. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Procedăm ca mai sus:

derivata lui $\frac{1}{8}x^4$ este..... $4 \times \frac{1}{8}x^{4-1} = \frac{x^3}{2}$
» » $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ este $\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$

$$= -\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{2}$$

Deci, făcând suma acestor derivate și dând pe $\frac{1}{2}$ factor comun, avem:

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right).$$

CAPITOLUL IX

1. $y = (ax - b)(ax + c)$.

Prima cale: facem produsul celor două paranteze:

$$(ax - b)(ax + c) = a^2x^2 - abx + acx - cb.$$

Formăm derivata acestui polinom, luând derivata fiecărui termen în parte:

$$y' = 2a^2x - ab + ac.$$

A doua cale: punem:

$$ax - b = u$$

$$ax + c = v$$

așa că funcțiunea dată se prezintă sub forma:

$$y = uv$$

a cărei derivată este, după cum știm:

$$y' = vu' + uv'.$$

Pentru ca să calculăm această derivată, trebue să aflăm mai întâi pe u' și v'. Cunoscând de mai sus expresiunile lui u și v, avem:

$$u' = a$$

$$v' = a$$

Avem, prin urmare:

$$y' = vu' + uv' = (ax + c)\,a + (ax - b)a.$$

Desfacem parantezele:

$$y' = a^2x + ac + a^2x - ab$$

sau:

$$y' = 2a^2x + ac - ab$$

rezultat identic cu cel obținut pe prima cale.

2. $y = 2x^3(x^4 - 6)$.

Prima cale: facem înmulțirea din membrul II:

$$y = 2x^7 - 12x^3.$$

Derivata acestei expresiuni este:

$$y' = (7 \times 2x^{7-1}) - (3 \times 12x^{3-1})$$

sau:

$$y' = 14x^6 - 36x^2.$$

A doua cale: punem:

$$u = 2x^3$$

$$v = x^4 - 6.$$

Derivatele acestor funcțiuni auxiliare, sunt:

$$u' = 6x^2$$

$$v' = 4x^3.$$

Aplicăm formula cunoscută pentru derivata unui produs:

$$y' = vu' + uv' = (x^4 - 6)\,6x^2 + (2x^3 \times 4x^3)$$

facem înmulțirile indicate în formulă:

$$y' = 6x^6 - 36x^2 + 8x^6$$

sau încă:

$$y' = 14x^6 - 36x^2$$

același rezultat, ca pe calea precedentă.

3. $y = (x^3 + 5)^4$.

Prima cale, făcând mai întâi înmulțirile cerute de exponentul binomului, nu mai este aici recomandabilă, căci cere timp și calcule. In schimb, calea a doua este mult mai expeditivă. In adevăr, punem:

$$u = x^3 + 5.$$

Derivata acestei funcțiuni auxiliare, este:

$$u' = 3x^2.$$

Prin introducerea funcțiunei u, expresiunea lui y se scrie:

$$y = u^4$$

așa că derivata se alcătuiește cu ajutorul formulei (8) din cap. IX:

$$y' = nu'u^{n-1} = 4 \times 3x^2 (x^3 + 5)^{4-1}$$

sau:

$$y' = 12x^2 (x^3 + 5)^3$$

4. $y = \sqrt[5]{ax + b}$.

Punem radicalul sub forma de exponent fracționar:

$$y = (ax + b)^{\frac{1}{5}}$$

și luăm:

$$u = ax + b.$$

Derivata acestei funcțiuni auxiliare este:

$$u' = a.$$

Prin introducerea lui u, funcțiunea y se scrie:

$$y = u^{\frac{1}{5}}$$

așa că derivata se calculează după formula (8) din capitolul corespunzător, unde $n = \frac{1}{5}$

$$y' = nu'u^{n-1} = \frac{1}{5} \times a \times (ax + b)^{\frac{1}{5}-1}$$

sau:

$$y' = \frac{a}{5} (ax + b)^{-\frac{4}{5}}$$

sau încă:

$$y' = \frac{a}{5\sqrt[5]{(ax + b)^4}}.$$

5. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Scriem radicalul sub forma de exponent fracționar:

$$y = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Punem:

$$u = (1 - x^2)$$

a cărui derivată este:

$$u' = -2x.$$

Derivata y' se calculează după formula (8), unde $n = -\frac{1}{2}$

$$y' = nu'u^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2x) \times (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}-1}$$

sau:

$$y' = x\,(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

sau încă:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

CAPITOLUL X

1. $y = \dfrac{ax - b}{ax + b}$.

Avem aici un cât de două funcțiuni. Punem:

$$u = ax - b$$
$$v = ax + b.$$

Derivatele u' și v' se calculează imediat:

$$u' = a$$
$$v' = a.$$

Derivata y' se scrie cu ajutorul formulei (5) din text:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(ax + b)a - (ax - b)a}{(ax + b)^2}.$$

Desfacem parantezele dela numărător:

$$y' = \frac{a^2x + ab - a^2x + ab}{(ax + b)^2}.$$

La numărător, reducem termenul a^2x și adunăm pe ceilalți doi termeni identici. Obținem:

$$y' = \frac{2ab}{(ax + b)^2}.$$

2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Procedăm ca mai sus, punând:

$$u = x^2 + 1$$
$$v = x^2 - 1$$

și calculăm derivata acestor două funcțiuni auxiliare:

$$u' = 2x$$
$$v' = 2x.$$

Derivata funcțiunii y se scrie cu ajutorul formulei (5) din text:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(x^2 - 1)\,2x - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2}$$

dăm la numărător factor comun pe $2x$:

$$y' = \frac{2x\,(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}.$$

La numărător, între paranteze, se reduce x^2 iar -1 cu -1 face -2. Avem deci:

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

3. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$.

Punem:

$$u = x^3$$

$$v = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Derivata funcțiunii u este:

$$u' = 3x^2.$$

Pentru calcularea derivatei v', punem:

$$1 - x^2 = w$$

deci:

$$v = w^{\frac{1}{2}}.$$

Derivata w' este:

$$w' = -2x.$$

Cum funcțiunea v este acum de forma u^n, derivata se calculează după formula cunoscută:

$$v' = nw'w^{n-1} = \frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

sau încă:

$$v' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivata y' se scrie cu ajutorul formulei (5) din text:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} \times 3x - x^3\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}$$

sau:

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

Observăm că la numărător avem un întreg, care se adună cu o fracție. Ca să facem această adunare, înmulțim întregul cu numitorul iar la produs adăugăm și pe numărător; apoi dăm ca numitor pe numitorul fracției. Avem deci:

$$y' = \frac{\dfrac{3x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} + x^4}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

sau:

$$y' = \frac{3x^2(1-x^2) + x^4}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x^2 - 3x^4 + x^4}{(1-x^2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

sau:

$$y' = \frac{3x^2 - 2x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2(3-2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

CAPITOLUL XI

1. $(a + b)^8$.

Primul termen al desvoltării este termenul întâi al binomului, ridicat la aceeaşi putere ca şi binomul:

$$a^8.$$

In termenii următori, exponentul lui a scade, de fiecare dată cu o unitate iar exponentul lui b creşte, de fiecare dată, cu o unitate. Deci al doilea termen al desvoltării cuprinde produsul a^7b. Coeficientul său numeric se găseşte, luând în considerare termenul precedent, adică pe a^8. Acest termen are pentru a exponentul 8, are coeficientul 1 şi este de rangul 1. Vom înmulţi deci exponentul 8 cu coeficientul 1 şi vom împărţi cu rangul 1; ceea ce obţinem reprezintă coeficientul termenului al doilea:

$$\frac{8 \times 1}{1} = 8.$$

Aşa dar, termenul de rangul doi este:

$$8a^7b.$$

Termenul următor din desvoltarea binomului cuprinde produsul a^6b^2. Coeficientul său se calculează, luând în considerare termenul precedent, care este $8a^7b$. Acest termen are pentru a exponentul 7, are coeficientul 8 şi este de rangul 2. Vom înmulţi, deci, exponentul 7 cu coeficientul 8 şi vom împărţi prin rangul 2. Ceea ce obţinem este coeficientul termenului a^6b^2:

$$\frac{7 \times 8}{2} = 28.$$

Prin urmare, termenul de rangul trei este:

$$28a^6b^2.$$

Şi tot aşa mai departe, obţinând la sfârşit desvoltarea:

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

Observăm că, în desvoltarea binomului, coeficienţii termenilor merg crescând până la mijlocul desvoltării, de unde apoi scad, reproducându-se în ordinea inversă. De aceea, în desvoltarea unui binom, nu este nevoie să calculăm direct chiar toţi coeficienţii. Când valoarea lor începe să scadă, începe în acelaşi timp şi reproducerea lor în ordinea inversă; aşa încât, coeficienţii următori îi găsim deagata în prima parte a desvoltării.

2. $\left(a + \frac{x}{c}\right)^6$.

Desvoltarea acestui binom este:

$$a^6 + 6a^5\left(\frac{x}{c}\right) + 15a^4\left(\frac{x}{c}\right)^2 + 20a^3\left(\frac{x}{c}\right)^3 + 15a^2\left(\frac{x}{c}\right)^4 + 6a\left(\frac{x}{c}\right)^5 + \left(\frac{x}{c}\right)^6.$$

3. $(2 + 3)^4$.

Procedăm ca şi în cazul literelor:

$$2^4 + 4.2^3.3 + 6.2^2.3^2 + 4.2.3^3 + 3^4.$$

Facem produsul factorilor din fiecare termen:

$$16 + 96 + 216 + 216 + 81 = 625.$$

Se înţelege că, în cazul de faţă, putem face calculul şi direct:

$$(2 + 3)^4 = 5^4 = 625.$$

CAPITOLUL XII

1. $y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$

Aflăm derivata fiecărui termen în parte:

derivata lui $\frac{x}{1}$ este 1

» » $\frac{x^2}{1.2}$ » $\frac{1}{1.2} 2x = \frac{x}{1}$

» » $\frac{x^3}{1.2.3}$ » $\frac{1}{1.2.3} 3x^2 = \frac{x^2}{1.2}$

» » $\frac{x^4}{1.2.3.4}$ » $\frac{1}{1.2.3.4} 4x^3 = \frac{x^3}{1.2.3}$

Adunăm rezultatele obținute:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

Șirul termenilor din membrul II reproduce seria e^x. Avem, așa dar:

$$\frac{dy}{dx} = e^x.$$

2. $y = \log \frac{x-1}{x+1}$.

Punem:

$$\frac{x-1}{x+1} = w,$$

atunci expresiunea dată devine:

$$y = \log w$$

și deci:

$$\frac{dy}{dw} = \frac{1}{w},$$

în sistemul logaritmilor neperieni. Noi căutăm însă derivata lui y în raport cu variabila x; vom scrie, deci:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

sau, ținând seamă de rezultatul găsit mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dx}$$

Trebue să aflăm valoarea raportului $\frac{dw}{dx}$, care exprimă derivata funcțiunei w în raport cu variabila x. După cum se poate vedea de mai sus, funcțiunea w se prezintă ca un raport de alte două funcțiuni; punem:

$u = x - 1$ deci $u' = 1$
$v = x + 1$ deci $v' = 1$.

Atunci:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{(x+1)1 - (x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Introducem acest rezultat în expresiunea lui $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{w} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$

sau, înlocuind pe w prin expresiunea lui, în funcțiune de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2}$$

și efectuând reducerile:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

3. $y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

Punem:

$$u = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Atunci funcțiunea dată se prezintă sub forma:

$$y = \log u$$

și deci, derivata funcțiunei y, în raport cu variabila u, este:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}.$$

Considerăm iarăși identitatea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Inlocuim pe $\frac{dy}{du}$ prin valoarea găsită mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Să calculăm valoarea raportului $\frac{du}{dx}$, care nu este altceva decât derivata funcțiunei u, în raport cu variabila x. Observăm că funcțiunea u este alcătuită din doi termeni:

$$u = x + \sqrt{x^2-1}$$

fiecare termen fiind o funcțiune de x. Vom calcula, deci, derivata fiecărui termen în parte:

derivata lui x este 1

» » $\sqrt{x^2-1}$ este .... $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Deci:

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Adunăm întregul cu fracțiunea:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

Introducem acest rezultat în expresiunea lui $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Inlocuim pe u prin expresiunea lui, în funcțiune de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Simplificăm cu $x + \sqrt{x^2-1}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

CAPITOLUL XIII

1. $y = a^{-x}$

Avem aici o funcțiune de funcțiune; punem deci:

$$u = -x,$$

de unde:

$$\frac{du}{dx} = -1.$$

Prin introducerea funcțiunii auxiliare u, funcțiunea dată y, se scrie:

$$y = a^u.$$

Sub această formă avem o funcțiune exponențială simplă, a cărei derivată este, după cum știm, egală cu funcțiunea însăși înmulțită cu logaritmul neperian al numărului a:

$$\frac{dy}{du} = a^u \log a.$$

Pentru ca să obținem derivata lui y în raport cu x, considerăm formula cunoscută:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

și înlocuim rapoartele din membrul II prin expresiunile lor, stabilite mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = a^u \log a \times (-1)$$

sau:

$$y' = -a^{-x} \log a.$$

2. $y = e^{e^x}$.

Având și aici tot o funcțiune de funcțiune, punem ca; de obicei:

$$u = e^x$$

de unde:

$$\frac{du}{dx} = e^x.$$

Ținând seamă de u, funcțiunea y se scrie:

$$y = e^u$$

deci:

$$\frac{dy}{du} = e^u.$$

Luăm acum formula cunoscută:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

și introducem în membrul II expresiunile stabilite mai sus:

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot e^x$$

sau:

$$y' = e^{e^x} \cdot e^x.$$

3. $y = Ae^{k_1 x} + Be^{-k_2 x}$.

Punem:

$$u = Ae^{k_1 x}$$

$$v = Be^{-k_2 x}.$$

Funcțiunea y fiind o sumă de alte două funcțiuni, derivata ei este, după cum știm, egală cu suma derivatelor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Să calculăm mai întâi derivata lui u. Observăm că u este o funcțiune de funcțiune, căci e are ca exponent nu variabila singură, ci produsul k_1x. Vom pune deci:

$$w = k_1x$$

de unde:

$$\frac{dw}{dx} = k_1.$$

Prin introducerea funcțiunei w, expresiunea lui u se scrie:

$$u = Ae^w.$$

Derivata funcțiunei u, în raport cu variabila w este:

$$\frac{du}{dw} = Ae^w.$$

Cum noi căutăm derivata lui u în raport cu variabila x, luăm:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

și introducem în membrul II expresiunile stabilite mai sus:

$$\frac{du}{dx} = Ae^w \times k_1$$

sau:

$$\frac{du}{dx} = k_1Ae^{k_1x}.$$

Procedăm în mod analog și pentru aflarea derivatei funcțiunii v; obținem:

$$\frac{dv}{dx} = -k_2Be^{-k_2x}.$$

Adunăm cele două derivate găsite:

$$y' = k_1Ae^{k_1x} - k_2Be^{-k_2x}.$$

CAPITOLUL XIV

1. $y = \sin^2 x$.

Mai putem scrie această expresiune și astfel:

$$y = (\sin x)^2.$$

Se vede acum că funcțiunea dată este de forma $y = u^n$, pentru care derivata se scrie: $y' = nu'u^{n-1}$. Aici $n = 2$ iar u' reprezintă derivata lui $\sin x$, care este $\cos x$. Avem, prin urmare:

$$y' = 2 \times \cos x \times (\sin x)^{2-1}$$

sau:

$$y' = 2 \sin x \cos x.$$

Iată expresiunea derivatei căutate! Dar Trigonometria ne înlesnește să scriem acest rezultat și mai strâns. Cititorii cari nu au uitat de tot Trigonometria, știu că produsul $2 \sin x . \cos x$ reprezintă tocmai $\sin 2x$. Cine a uitat acest lucru să urmărească calculul de mai jos:

Considerăm formula fundamentală din Trigonometrie:

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

în care facem:

$$a = b = x$$

atunci formula fundamentală scrisă mai sus, devine:

$$\sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x$$

sau:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

adică rezultatul căutat.

Urmează că derivata funcțiunei propuse se mai poate scrie și astfel:

$$y' = \sin 2x.$$

2. $y = \operatorname{tg} x$.

Știm din Trigonometrie că:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

așa că funcțiunea dată se poate pune și sub forma de fracțiune:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Luăm:

$$u = \sin x$$

$$v = \cos x$$

la care derivatele respective sunt:

$$u' = \cos x$$

$$v' = -\sin x.$$

Derivata y' fiind derivata unui cât de două funcțiuni u și v, se calculează după formula cunoscută:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

sau:

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Din Trigonometrie știm că: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, așa că, expresiunea derivatei y' capătă forma:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. $y = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}$.

Această expresiune spune că y este arcul al cărui sinus este $\frac{x}{a}$, adică putem scrie:

$$\frac{x}{a} = \sin y$$

sau:

$$x = a \sin y.$$

Aici x apare ca funcțiune iar y ca variabilă independentă; derivata funcțiunii x, în raport cu variabila y este:

$$\frac{dx}{dy} = a \cos y$$

de unde:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a \cos y}.$$

Iată derivata căutată! Să înlocuim acum pe $\cos y$ printr'o expresiune care să cuprindă numai variabila x. Pentru aceasta, pornim dela formula fundamentală din Trigonometrie:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1,$$

de unde:

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Dar am văzut că $\sin y = \frac{a}{x}$, de unde $\sin^2 y = \frac{x^2}{a^2}$, aşa că:

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Introducem această expresiune în formula lui y':

$$y' = \frac{1}{a \times \frac{\pm\sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

CAPITOLUL XV

1. $u = 2x^2 + 3xy - y^2 + 4x - y + 8.$

Să calculăm mai întâi derivata funcțiunii u în raport cu variabila x, considerând pe y constant. Expresia de mai sus fiind un polinom, derivata lui este egală cu suma

algebrică a derivatelor termenilor. Avem deci, considerând ca variabilă numai pe x:

derivata lui $+ 2x^2 \ldots + 4x$
» » $+ 3xy \ldots + 3y$
» » $- y^2 \ldots .$ 0 (căci y este considerat constant)
» » $+ 4x \ldots . + 4$
» » $- y \ldots .$ 0
» » $+ 8 \ldots .$ 0

Facem suma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 3y + 4.$$

Să considerăm pe y ca variabilă independentă, x fiind acum constant:

derivata lui $+ 2x^2 \ldots$ 0
» » $+ 3xy \ldots + 3x$
» » $- y^2 \ldots . - 2y$
» » $+ 4x \ldots .$ 0
» » $- y \ldots . - 1$
» » $+ 8 \ldots .$ 0

Facem suma:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x - 2y - 1.$$

Diferențiala totală a funcțiunei propuse este:

$$du = \frac{\partial u}{dx}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

sau:

$$du = (4x + 3y + 4)\,dx + (3x - 2y - 1)dy.$$

2. $y = z^x$.

Aici y este funcțiune de două variabile, z și x. Luăm mai întâiu pe x constant; atunci funcțiunea y se aseamănă cu $y = x^n$, studiată precedent, unde exponentul este constant, și a cărei derivată știm că este nx^{n-1}. In cazul de față, vom scrie:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = xz^{x-1}\,.$$

Considerăm apoi pe z constant, x fiind singura variabilă independentă. Acum funcțiunea y apare ca o funcțiune exponențială simplă, analoagă cu a^x, exponentul fiind variabil iar mărimea a sau z, constantă. Am văzut că pentru funcțiunea a^x derivata este $a^x \log a$; pentru funcțiunea analoagă z^x, unde z este constant, vom scrie în mod analog:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z^x \log z.$$

Diferențiala totală dy este:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial z}\,dz + \frac{\partial y}{\partial x}\,dx$$

sau:

$$dy = xz^{x-1}\,dz + z^x \log z\,.dx.$$

3. $y = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Calculăm mai întâi derivata funcțiunii y în raport cu variabila x, considerând pe z constant. Punem:

$$u = x^2 + z^2$$

și însemnăm cu u'_x derivata lui u în raport cu x:

$$u'_x = 2x.$$

Atunci funcțiunea y se scrie:

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$$

și deci derivata lui y în raport cu x se calculează după formula cunoscută: $nu'u^{n-1}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} \times u'_x \times u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{u'_x}{2\sqrt{u}}$$

sau, înlocuind pe u și u'_x prin expresiunile lor:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}\,.$$

Derivata lui y în raport cu cealaltă variabilă, z, se calculează în mod analog:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \times u'_z \times u^{\frac{1}{2}-1}$$

unde:

$$u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = 2z.$$

Deci:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{u}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Diferențiala totală este:

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}dz.$$

CALCULUL INTEGRAL

CAPITOLUL I

1. $\int 5\, dy.$

Scoatem factorul constant 5 înafara semnului de integrare:

$$5\int dy$$

și, bazându-ne pe formula de integrare $\int dy = y + \text{const.}$, avem:

$$5\int dy = 5y + \text{const.}$$

2. $\int 4\cos(2x + 1)\, dx.$

Punem:

$$u = 2x + 1$$

de unde:

$$\frac{du}{dx} = 2 \text{ și deci } dx = \frac{du}{2}.$$

Integrala dată se scrie atunci:

$$\int 4 \cos u \cdot \frac{du}{2} = 2 \int \cos u \cdot du$$

și soluția se scrie imediat:

$$2 \sin u + \text{const.},$$

Revenim la variabila inițială x:

$$2 \sin (2x + 1) + \text{const.}$$

3. $\int A \sin (x + 3)\, dx.$

Punem:

$$x + 3 = u$$

deci:

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \text{sau} \quad dx = du.$$

Atunci expresiunea dată devine:

$$\int A \sin u \cdot du = A \int \sin u \cdot du.$$

Soluția se scrie imediat, deoarece, sub această formă, expresiunea noastră se identifică cu una din formulele de integrare:

$$\int \sin u \cdot du = -\cos u + \text{const.}$$

deci:

$$A \int \sin u\, du = -A \cos u + \text{const.}$$

sau, revenind la variabila x:

$$-A \cos (x + 3) + \text{const.}$$

CAPITOLUL II

1. $\int 2x^7\, dx.$

Scoatem de sub integrală factorul constant 2:

$$2 \int x^7\, dx.$$

Observăm acum că integrala dată este de forma $\int x^m\, dx$, a cărei soluție știm că este $\frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{const}$. Prin urmare:

$$2 \int x^7\, dx = 2 \left[\frac{x^{7+1}}{7+1} + \text{const} \right].$$

și, făcând reducerile:

$$\frac{x^8}{4} + \text{const.}$$

2. $\int \frac{dx}{x+1}.$

Observăm aici că numărătorul este diferențiala numitorului; vom pune, deci:

$$u = x + 1$$

de unde:

$$\frac{du}{dx} = 1 \text{ și, prin urmare } dx = du.$$

In expresiunea integralei date, înlocuim pe $x+1$ prin u și pe dx prin du; obținem astfel:

$$\int \frac{du}{u}$$

care se identifică cu formula de integrare $\int \frac{dx}{x}$ indicată în text, a cărei soluție este $\log x + \text{const.}$ In cazul de față, fiind vorba de variabila u, vom scrie soluția:

$$\log u + \text{const.}$$

și, trecând la variabila x:

$$\log (x + 1) + \text{const.}$$

3. $\int a^{2x}\, dx.$

Punem:

$$u = 2x$$

deci:

$$\frac{du}{dx} = 2, \text{ sau } dx = \frac{du}{2}.$$

Prin introducerea funcțiunii auxiliare u, expresiunea dată spre integrare, se scrie:

$$\int a^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int a^u\, du.$$

In felul acesta am adus integrala de rezolvat la forma cunoscută $\int a^x\, dx$, ce are ca soluție $\frac{a^x}{\log a} + \text{const.}$ In cazul de față, soluția se scrie:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^u}{\log a} + \text{const.}$$

sau, revenind la variabila x:

$$\frac{a^{2x}}{2 \log a} + \text{const.}$$

CAPITOLUL III

1. $\int (x^3 + 2)\, dx.$

Desfacem parantezele și, știind că integrala unei sume este egală cu suma integralelor, avem:

$$\int x^3\, dx + \int 2\, dx.$$

Vom rezolva fiecare integrală în parte.

Prima integrală este de forma $\int x^m\, dx$, a cărei soluție o cunoaștem. In cazul de față, soluția se scrie:

$$\frac{x^{3+1}}{3+1} + \text{const.} = \frac{x^4}{4} + \text{const}$$

La cea de a doua integrală, scoatem factorul constant 2 de sub semnul de integrare:

$$2\int dx.$$

Cu ajutorul *formulei de integrare* $\int dx = x + \text{const.}$ vom scrie soluția în cazul de față:

$$2\int dx = 2x + \text{const.}$$

Așa dar, soluția integralei propuse este:

$$\frac{x^4}{4} + 2x + \text{const.}$$

2. $\int (x+4)^3\, dx.$

Pentru calcularea acestei integrale putem proceda pe două căi.

Prima cale: punem:

$$u = x + 4$$

deci:

$$\frac{du}{dx} = 1 \text{ de unde } dx = du.$$

Atunci integrala dată se scrie:

$$\int u^3\, du$$

a cărei soluție este:

$$\frac{u^{3+1}}{3+1} + \text{const.} = \frac{u^4}{4} + \text{const.}$$

sau, revenind la variabila inițială x:

$$\frac{(x+4)^4}{4} + \text{const.}$$

Calea a doua: desvoltăm binomul:

$$(x+4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64.$$

Integrala dată se poate pune acum sub forma unei sume de mai multe integrale:

$$\int x^3\, dx + 12\int x^2\, dx + 48\int x\, dx + 64\int dx.$$

Soluția este:

$$\frac{x^4}{4} + 12\,\frac{x^3}{3} + 48\,\frac{x^2}{2} + 64x + \text{const.}$$

sau:

$$\frac{x^4}{4} + 4x^3 + 24x^2 + 64x + \text{const.}$$

Se verifică ușor că această expresiune nu este altceva decât desvoltarea binomului:

$$\frac{(x+4)^4}{4},$$

adică am obținut același rezultat ca pe calea dintâi.

3. $\int (2x + 1)\,(2x - 1)\,dx.$

Sub semnul de integrare se află un produs de sumă prin diferență; se știe din Algebră că, un asemenea produs este egal cu diferența patratelor termenilor:

$$(2x + 1)\,(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1.$$

Ținând seamă de aceasta, mai putem scrie integrala dată și astfel:

$$\int (4x^2 - 1)\,dx$$

sau:

$$4\int x^2\,dx - \int dx.$$

Soluțiile acestor două integrale sunt:

$$4\int x^2\,dx = 4\,\frac{x^{2+1}}{2+1} + \text{const.} = \frac{4}{3}\,x^3 + \text{const.}$$

$$-\int dx = -x + \text{const.}$$

Deci soluția integralei date este:

$$\frac{4}{3}\,x^3 - x + \text{const.}$$

CAPITOLUL VI

1. $y = \int_o^r 2\pi\,x\,.\,dx.$

Scoatem factorul constant 2π înafara integralei:

$$2\pi\int_o^r x\,dx$$

și facem integrarea obișnuită, ca pentru o integrală nedefinită. Se vede ușor că integrala aceasta este de forma $\int x^m\,dx$, unde $m = 1$. Vom scrie deci soluția:

$$\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + \text{const.}$$

Să ținem acum seamă de limitele de integrare:

$$2\pi\int_o^r x\,dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^r = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$$

sau încă:

$$y = \pi r^2.$$

Acest exercițiu ne învață și cum se poate obține suprafața cercului, cu ajutorul calculului integral. In adevăr, să împărțim cercul (fig. 9) într'un număr extrem de mare de inele, fiecare inel având grosimea dx. Să considerăm suprafața inelară aflată la distanța x de centrul cercului; ea se poate asemui cu o bandă de lungimea $2\pi x$ (lungimea circonferinței de rază x) și de grosime dx. Suprafața acestei bande de grosime infinit mică este $2\pi x.dx$.

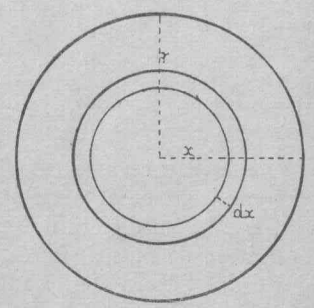


Fig. 9

Pentru ca să aflăm suprafața cercului, vom însuma toate bandele aflate în cuprinsul cercului. Această operație nu reprezintă altceva decât integrarea expresiunii $2\pi x.dx$, când x variază dela 0 la r (raza cercului):

$$\int_o^r 2\pi x\,dx,$$

adică tocmai expresiunea propusă ca exercițiu, unde y reprezintă suprafața cercului.

2. $y = \int_o^r 4\pi x^2\, dx.$

Dăm factorul constant 4π în afara integralei:

$$y = 4\pi \int_o^r x^2\, dx$$

și soluția se scrie imediat:

$$y = 4\pi \left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_o^r = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi 0^3$$

ultimul termen fiind nul, ne rămâne numai:

$$y = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

formulă prin care se calculează volumul sferei de rază r. Să explicăm acest rezultat.

Considerăm o sferă de rază r, pe care o împărțim într'o infinitate de pături sferice, fiecare având grosimea infinit mică dx. Pătura sferică aflată la depărtarea x de centrul cercului, are suprafața $4\pi x^2$ și grosimea dx. Putem spune că volumul acestei pături sferice de grosime infinit mică este:

$$\text{suprafața} \times \text{grosimea} = 4\pi x^2\, dx\ ^{1}).$$

---

[1]) Justificarea acestei formule se poate face astfel. Descompunem pătura sferică într'un număr extrem de mare de prisme infinit de subțiri. Fiecare prismă are înălțimea comună dx iar baza se găsește pe suprafața sferei de rază x. Volumul fiecărei prisme elementare este *baza* $\times$ dx.

Dacă adunăm toate aceste volume elementare, obținem volumul păturei sferice considerate:

$$\text{Vol. păt. sferice} = (\text{bază} \times dx) + (\text{baza} \times dx)$$

$$+ (\text{baza} \times dx) + (\text{baza} \times dx) + \ldots\ldots\ldots$$

Dăm factor comun pe dx:

$$\text{Vol. păturei sferice} = (\text{baza} + \text{baza} + \text{baza} + \ldots)\, dx.$$

Dar suma tuturor bazelor, așternute pe sfera de rază x, nu reprezintă altceva decât suprafața acestei sfere adică $4\pi x^2$. Mai putem deci scrie:

$$\text{Volumul păturei sferice} = 4\pi x^2 dx.$$

Ca să aflăm volumul sferei, nu avem decât să însumăm volumul tuturor păturilor sferice, ce se succed dealungul razei r, când x variază dela 0 la r. Această însumare se efectuează prin integrala:

$$\int_o^r 4\pi x^2\, dx,$$

propusă aici ca exercițiu.

3. $y = \int_o^{x_1} \frac{a}{x+b}\, dx.$

Punem $u = x + b$, deci $\frac{du}{dx} = 1$, de unde $dx = du$. Acum integrala dată se scrie:

$$y = a \int_o^{x_1} \frac{du}{u}$$

și soluția este:

$$y = a \left[\log u \right]_0^{x_1}$$

sau, revenind la variabila inițială x:

$$y = a \left[\log (x + b) \right]_0^{x_1} = a \left[(\log (x_1 + b) - \log (0 + b) \right],$$

sau:

$$y = a [\log (x_1 + b) - \log b)],$$

sau încă:

$$y = a \log \frac{x_1 + b}{b}.$$

CUPRINSUL

		Pag.
Prefața		5
	PARTEA I	
	CALCULUL DIFERENȚIAL	
Cap. I:	In care se spune ceva despre « variabilă și despre « funcțiune »	21
	Probleme	24
Cap. II:	Aici se lămurește noțiunea de « infinit mic »	25
Cap. III:	In care se vorbește despre creșterea mărimilor algebrice	28
	Probleme	33
Cap IV:	Despre creșterile infinit mici ale mărimilor algebrice	33
	Probleme	38
Cap. V:	Cititorul află acum ce este o derivată	38
Cap. VI:	In care se arată că aflarea derivatei nu este tocmai așa de complicată, pe cât ar părea la început	42
	Observațiuni	53
	Probleme	57
Cap. VII:	In urmărirea constantelor	58
	Probleme	63
Cap. VIII:	Cum se calculează derivata unei sume de mai multe funcțiuni	64
	Probleme	68
Cap. IX:	Despre derivata produsului mai multor funcțiuni	68
	Probleme	75
Cap. X:	Derivata câtului a două funcțiuni	75
	Probleme	80

		Pag.
Cap. XI:	Vă mai amintiți ceva de binomul lui Newton?	80
	Probleme	93
Cap. XII:	Despre logaritmi și derivata funcțiunii logaritmice	93
	Probleme	100
Cap. XIII:	Derivata funcțiunii exponențiale	100
	Probleme	106
Cap. XIV:	Derivata funcțiunilor circulare	106
	Probleme	117
Cap. XV:	Derivate parțiale	117
	Probleme	123
Cap. XVI:	O raită prin domeniul Mecanicei	124

PARTEA II

CALCULUL INTEGRAL

		Pag.
Cap. I:	Problema inversă: să găsim funcțiunea din care se trage o derivată dată	135
	Probleme	144
Cap. II:	Alte formule de integrare	144
	Probleme	155
Cap. III:	Câteva reguli de integrare	155
	Probleme	162
Cap. IV:	Arta de a integra	162
Cap. V:	Iarăși puțină Mecanică	166
Cap. VI:	Calcularea suprafețelor prin integrare	173
	Probleme	182
Cap. VII:	Și o excursie prin meleagurile Fizicei	182

PARTEA III

DESLEGAREA PROBLEMELOR

Calculul diferențial

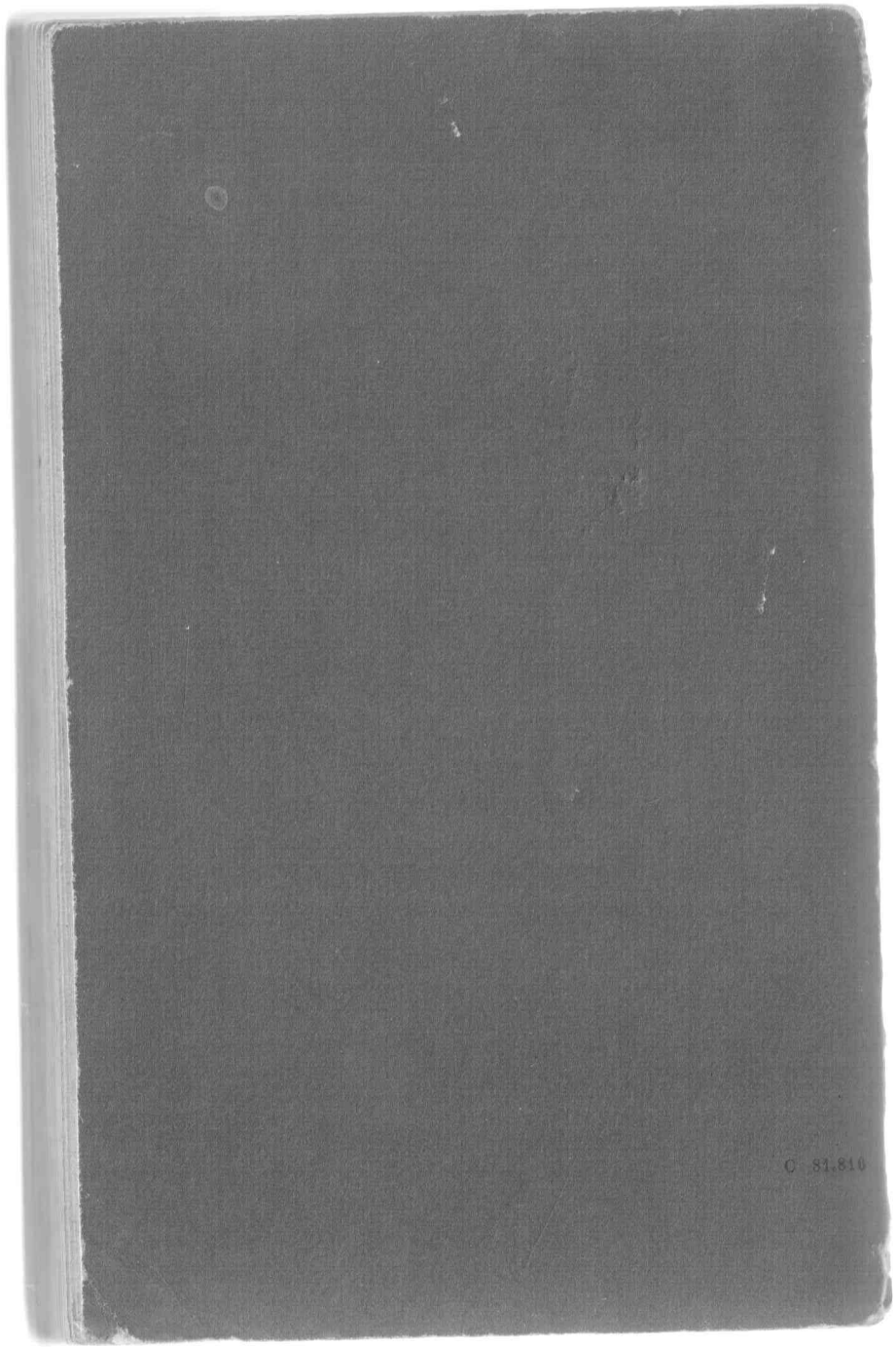
		Pag.
Dela capitolul	I	195
» »	III	196
» »	IV	198
» »	VI	201
» »	VII	203
» »	VIII	204
» »	IX	206

		Pag.
Dela capitolul	X	210
» »	XI	214
» »	XII	216
» »	XIII	220
» »	XIV	223
» »	XV	226

Calculul integral

		Pag.
Dela capitolul	I	231
» »	II	233
» »	III	235
» »	VI	238

MONITORUL OFICIAL ŞI
IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ
BUCUREŞTI, 1943.


O 81.810